

Geometría Diferencial

Segundo Cuatrimestre 2004

1. TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Consideramos demostrado el teorema de la función inversa:

Teorema 1.1. *Sea U un abierto de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, $p \in U$ tal que $J_f(p) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)|_p \neq 0$. Entonces existe un abierto V que contiene a p tal que $f|_V : V \rightarrow f(V)$ es biyectiva, $f(V)$ es un abierto, y $(f|_V)^{-1}$ es diferenciable.*

El objetivo es demostrar dos teoremas, que llamaremos el teorema de la función implícita, y el teorema del rango.

Teorema 1.2. *(Función implícita.) Sea U un abierto de \mathbb{R}^{n+m} y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, $p = (x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$ y $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\right)|_p \neq 0$. Entonces existe un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a x_0 , un abierto B que contiene a y_0 y una función $g : A \rightarrow B$ con las siguientes propiedades:*

- si $x \in A$, entonces existe un único $y \in B$ tal que $f(x, y) = 0$;
- $f(x, g(x)) = 0 \forall x \in A$,
- g es diferenciable.

Daremos una guía de la demostración:

1. Considerar la función $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$F(x, y) := (x, f(x, y))$$

Considerar el p del enunciado, y verificar que esta F verifica las hipótesis del teorema de la función inversa.

2. Verificar que el diferencial de F es una matriz de bloques

$$dF|_p = \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ * & \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{i,j=1}^m \end{pmatrix}$$

3. Verificar que el abierto V del teorema de la función inversa puede tomarse de la forma $V = A \times B$.
4. Verificar que la inversa de una función del tipo $F(x, y) = (x, f(x, y))$ es necesariamente de la forma $h(x, y) = (x, k(x, y))$.
5. Verificar que $f(x, k(x, y)) = y$, y que por lo tanto la función $g : A \rightarrow B$ puede tomarse como $g(x) := k(x, 0)$.

Teorema 1.3. *(Rango.) Sea $A_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B_0 \subset \mathbb{R}^m$ dos subconjuntos abiertos, $F : A_0 \rightarrow B_0$ diferenciable, y supongamos $\text{rg}(df|_x) = k$ para todo $x \in A_0$. Si $p \in A_0$ y $q = F(p)$, entonces:*

1. Existen abiertos $A \subset A_0$, $B \subset B_0$ y difeomorfismo $G : A \rightarrow U$ y $H : B \rightarrow V$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^n , V es un abierto de \mathbb{R}^m , $H \circ F \circ G^{-1}(U) \subset V$, y
2. $H \circ F \circ G^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.

Guía de la demostración:

1. Ver que se puede reducir al caso en que $p = 0$, el origen de \mathbb{R}^n , y $q = 0$, el origen de \mathbb{R}^m .
2. Componiendo con una transformación lineal que permute las coordenadas, verificar que nos podemos restringir al caso en que el primer menor tiene rango k , es decir, $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)|_p \neq 0$.
3. Definir la función $G : A_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$G(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

y verificar que su diferencial es de la forma

$$dG = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^k & * \\ 0 & \text{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

4. Verificar las hipótesis del teorema de la función inversa para G , restringiendo a algún abierto A_1 que contenga a p .
5. Verificar que la composición $F \circ G^{-1}$ es de la forma

$$F \circ G^{-1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, \bar{f}(x))$$

y así deducir que el diferencial de $F \circ G^{-1}$ es de la forma

$$d(F \circ G^{-1}) = \begin{pmatrix} \text{Id}_k & 0 \\ * & \left(\frac{\partial \bar{f}_{k+i}}{\partial x_{k+j}} \right)_{i,j=1}^{n-k} \end{pmatrix}$$

6. Verificar que las \bar{f} 's dependen sólo de las variables x_1, \dots, x_k .
7. Definir $T : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ por la fórmula

$$T(y_1, \dots, y_m) = y_1, \dots, y_k, y_{k+1} + \bar{f}^{k+1}(y_1, \dots, y_k), \dots, y_m + \bar{f}^m(y_1, \dots, y_k)$$

donde V_1 es un entorno del cero suficientemente pequeño como para que $(y_1, \dots, y_m) \in V$ y para que $T(V_1) \subset B_0$.

8. Verificar que $T(0) = 0$, y que

$$dT = \begin{pmatrix} \text{Id}_k & 0 \\ * & \text{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

9. Utilizar el teorema de la función inversa para T , redefinir los abiertos pertinentes, y verificar que $H := T^{-1}$ verifica lo pedido, es decir, que

$$H \circ F \circ G^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$