Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre 2004
Práctica Uno

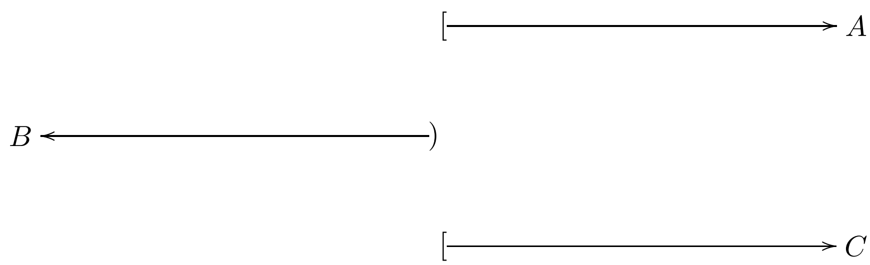
VARIEDADES TOPOLÓGICAS

Nota: En esta práctica, variedad significa variedad topológica.

1. Probar que toda variedad es localmente conexa y localmente compacta. Probar además que toda variedad es unión numerable de compactos.

2. Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido de la siguiente manera: $X = A \cup B \cup C$, donde

$$A = \{(x, y),\ x \geq 0, y = 1\},\ B = \{(x, y),\ x < 0, y = 0\},\ C = \{(x, y),\ x \geq 0, y = -1\}.$$



Definimos en X la siguiente topología: en $A - \{(0, 1)\},\ C - \{(0, -1)\}$ y B tomamos la topología de subespacios de $\mathbb{R}^2$ y como entornos abiertos de los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ tomamos respectivamente los conjuntos

$$N_\varepsilon^+ = \{(x, 1),\ 0 \leq x < \varepsilon\} \cup \{(x, 0),\ -\varepsilon \leq x < 0\}$$

y

$$N_\varepsilon^- = \{(x, -1),\ 0 \leq x < \varepsilon\} \cup \{(x, 0),\ -\varepsilon \leq x < 0\}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Probar que X es localmente euclideano (todo punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$) pero no es una variedad.

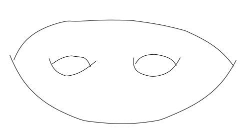
3. Probar que toda variedad es paracompacta.

4. Probar que un espacio paracompacto, localmente euclideano y Hausdorff no tiene necesariamente una base numerable.

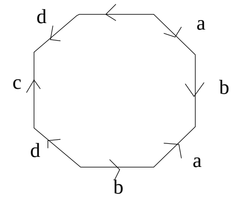
5. Verificar que un abierto de una variedad, es una variedad (de la misma dimensión). Verificar que el producto cartesiano de dos variedades es naturalmente una variedad (su dimensión es la suma).

6. Verificar que la esfera S^2 y el toro son superficies compactas, notar que el toro es homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

7. Verificar que "la" superficie compacta (y orientable) de género 2



se puede obtener identificando los lados orientados de un polígono como muestra la siguiente figura



8. Construir una superficie de género 3 utilizando el método del ítem anterior.

9. Probar que si identificamos los puntos opuestos del disco D^2 obtenemos una superficie.

10. Probar que los espacios proyectivos P^n son variedades.

11. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 con producto interno. Probar que el conjunto de puntos (x, y) en $V \times V$ ambos de norma 1 y que son mutuamente ortogonales, es una variedad. Calcular su dimensión.

12. Sea C una curva en $\mathbb{R}^3$ (variedad de dimensión 1). Probar que el conjunto de todos los vectores normales a C forman una variedad tridimensional.

Variedades diferenciables

1. Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d y encontrar un atlas.
   a) Esfera $S^n \in \mathbb{R}^{n+1}$, $d = n$ (ver ejercicio siguiente).
   b) Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\sim$, donde $x \sim y$ si $x = \pm y$, $d = n$.
   c) Espacio proyectivo, segunda versión: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, donde $x \sim y$ sii son l.d.
   d) Toro $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n veces), $d = n$.
   e) Cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$, $d = 2$.

2. Consideremos $\mathbb{R}^{n+1}$ con su producto interno usual, y a la esfera S^n como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$. Fijemos un punto a en la esfera que llamaremos polo sur, y $-a$ al polo norte. Consideremos $\{a\}^\perp$, que es un subespacio de dimensión n (isomorfo a $\mathbb{R}^n$). Se definen las *proyecciones estereográficas* como sigue:
$$U_+ = S^n \setminus \{a\}, \;\; u_+ : U_+ \to \{a\}^\perp$$
$$u_+(x) := \frac{x - \langle x, a\rangle a}{1 - \langle x, a\rangle}$$
$$U_- = S^n \setminus \{-a\}, \;\; u_- : U_- \to \{a\}^\perp$$
$$u_-(x) := \frac{x - \langle x, a\rangle a}{1 + \langle x, a\rangle}$$
Demuestre la validez de la fórmula inversa:
$$u_+^{-1}(y) = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} a + \frac{2}{|y|^2 + 1} y$$
Demuestre la fórmula $(u_- \circ u_+^{-1})(y) = \dfrac{y}{|y|^2}$. Haga un dibujo en $\mathbb{R}^3$ tomando $a = (0, 0, -1)$ (el polo sur), de manera tal que $a^\perp$ es el plano xy, dibuje la esfera unitaria, y convénzase que estas fórmulas son efectivamente la proyección estereográfica.

3. Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d, dada por el teorema de la función implícita.
   a) $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $d = m^2$;
   b) $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $d = (2m)^2$;
   c) $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$, $d = m^2 - 1$;
   d) $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$, $d = (2m)^2 - 2$;

e) $\mathrm{O}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = 1\}$, $d = m(m-1)/2$;

f) $\mathrm{SO}_{n,m} = \{A \in M_{n+m}(\mathbb{R}) \mid AI_{n,m}A^t = I_{n,m}, \text{ y } \det(A) = 1\}$, donde $I_{n,m}$ es una matriz diagonal con n unos y m menosunos;

g) $\mathrm{U}(m) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) \mid A.A^* = 1\}$, $d = m^2$ (sugerencia: si $B = AA^*$, entonces $B^* = B$, por lo tanto B tiene valores reales en la diagonal, y los valores por encima de la diagonal determinan a los valores por debajo de la diagonal; con estos datos, puede contar la cantidad de ecuaciones que significa $AA^* = 1$);

h) $\mathrm{SU}(m) = \{A \in U_m \mid \det(A) = 1\}$, $d = m^2 - 1$.

4. Probar que si $(X, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable y (ϕ_i, U_i) son cartas compatibles con el atlas entonces son cartas compatibles entre sí. Deducir que toda variedad diferenciable tiene un único atlas maximal equivalente.

5. En $\mathbb{R}$ definimos las cartas $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ y $(\mathbb{R}, c)$, donde $c(x) = x^3$. Probar que estas cartas no son compatibles. Deducir que los atlas maximales que contienen a cada una de estas cartas son distintos. Por último, probar que estas dos estructuras de variedad diferenciable sobre $\mathbb{R}$ son difeomorfas.

6. Probar que la noción de diferenciabilidad de una función $f : X \to \mathbb{R}$ depende sólo de la clase de equivalencia del atlas de X. Probar que la noción de diferenciabilidad de una función $f : X \to Y$ depende sólo de las clases de equivalencia de los atlas de X e Y.

7. Sea $X = \mathbb{R}^n \cup \{0'\}$, donde $0' \notin \mathbb{R}^n$. Se consideran dos cartas sobre X; una es $(\mathrm{id}, \mathbb{R}^n)$. La otra es (ϕ, U), donde $U = X - \{0\}$, $\phi(x) = x$ si $x \neq 0$ y $\phi(0') = 0$. Probar que con esta estructura, todo punto de X tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, que el cambio de coordenadas de este atlas es diferenciable, pero X no es Hausdorf.

$\longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\! : \!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow$

8. Probar que $\mathrm{id} : X \to X$ es diferenciable. Probar que la composición de funciones diferenciables lo es. Probar que $\Delta : X \to X \times X$, $\Delta(x) = (x, x)$ es diferenciable. Probar que las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$, $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son diferenciables.

9. Mostrar que la multiplicación de matrices $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es diferenciable. Idem la aplicación $\iota : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ definida por $M \mapsto M^{-1}$. Idem para la versión compleja, para SL, O, SO, U y SU.

10. Sea $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ el álgebra de cuaterniones. Es decir, el espacio vectorial de dimensión 4 con base $\{1, i, j, k\}$ con la tabla de multiplicación (que resulta asociativa) determinada por $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$. Si $w = a + bi + cj + dk$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), se define $\overline{w} := a - bi - cj - dk$, y $\mathrm{Re}(w) = a$. Verificar:

a) $w.\overline{w} = |w|^2$, $\mathrm{Re}(w\overline{w'}) = \langle w, w' \rangle$,

b) todo elemento $w \neq 0$ es inversible,

c) la multiplicación $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es diferenciable, la inversión $\mathbb{H} \setminus \{0\}. \to \mathbb{H} \setminus \{0\}$ también es diferenciable.

d) $\overline{(ww')} = \overline{w'}\,\overline{w}$ (sugerencia: considerar los casos $w = 1, i, j, k$, $w' = 1, i, j, k$ y después extender por $\mathbb{R}$-bilinealidad), concluir $|ww'| = |w||w'|$,

e) $S^3 = \{w \in \mathbb{H} \,/\, |w| = 1\}$ es un subgrupo, es variedad diferenciable de dimensión tres, la multiplicación e inversión son diferenciables.

f) $(\mathbb{R})^\perp = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ que lo identificamos con $\mathbb{R}^3$. Si $w \in S^3 \subset \mathbb{H}$, se define la aplicación $\mathbb{R}^\perp \to \mathbb{R}^\perp$ por $v = bi + cj + dk \mapsto wvw^{-1}$.

    1) Ver que w induce la identidad si y sólo si $w = \pm 1$

    2) $|v| = |wvw^{-1}|$, y por lo tanto se tiene definida una aplicación $S^3 \to \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, y como S^3 es conexo, de hecho la imagen está contenida en $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Ver que esta aplicación es morfismo de grupos, y diferenciable, el núcleo es $\{\pm 1\}$.