Geometría Diferencial

Segundo Cuatrimestre 2004

Práctica Dos

Espacios tangentes: versiones dentro de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y considerar la superficie
$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$
Dar la fórmula general del plano tangente en un punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

2. Elegir la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de preferencia, el punto preferido de $\mathbb{R}^2$, y ejemplificar el ítem anterior. Notar por ejemplo que si se toma un gráfico del tipo $(x, y, g(x^2 + y^2))$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene una superficie de revolución.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular, es decir, el conjunto $C = \{(x, y) \ / \ f(x, y) = c\}$ es no vacío, y no contiene puntos en donde $\nabla f = 0$. Si $(x_0, y_0) \in C$, verificar que $\nabla f|_{(x_0,y_0)}$ es perpendicular a la curva. Dar la ecuación de la recta tangente a C que pasa por (x_0, y_0).

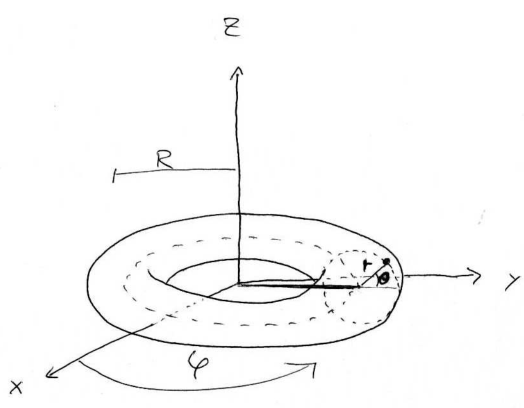
4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular, es decir, el conjunto $C = \{(x, y, z) \ / \ f(x, y) = c\}$ es no vacío, y no contiene puntos en donde $\nabla f = 0$. Si $(x_0, y_0, z_0) \in S$, verificar que $\nabla f|_{(x_0,y_0,z_0)}$ es perpendicular a la superficie. Dar la ecuación del plano tangente a S que pasa por (x_0, y_0, z_0).

5. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Utilizar el ejercicio anterior para dar la fórmula del plano tangente en cada punto de la esfera.

6. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la parametrización de una superficie regular, es decir, f es diferenciable, inyectiva, y $\{\frac{\partial f}{\partial x}|_p, \frac{\partial f}{\partial y}|_p\}$ es l.i. para todo $p \in U$. Llamamos S a la imagen de f. Restringir a f a una sola variable para así definir curvas contenidas en S, cuyos vectores tangentes sean $\frac{\partial f}{\partial x}$ o $\frac{\partial f}{\partial y}$. Mostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}|_p \times \frac{\partial f}{\partial y}|_p$ (el producto vectorial) es un vector normal al plano tangente a s en $f(p)$.

7. Parametrice la esfera S^2 (en coordenadas esféricas) y obtenga una expresión del vector normal al plano tangente. Recuerde que si hace ese cálculo en un punto p, debería dar un vector proporcional a p.

8. Sean $R > r > 0$, y consideremos al toro cuyo "ecuador interno" tiene radio R, y su sección vertical tiene radio r.



Convencerse que $f(\theta, \phi) = ((R + r\cos(\theta))\cos(\phi), (R + r\cos(\theta))\sin(\phi), r\sin(\theta))$ es una parametrización del toro en términos de "latitud y longitud". Calcular el plano tangente en un punto genérico. Verificar que este plano es horizontal en los puntos en que $\theta = \pm\pi/2$, y vertical en $\theta = 0, \pi$.

9. De la parametrización anterior, verificar que $x^2 + y^2 = (R + r\cos(\theta))^2$ y por lo tanto $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2Rr\cos(\theta) + r^2$. Concluir que ese toro es la superficie de nivel de ecuación
$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - R^2}{2R}\right)^2 + z^2 = r^2$$
Dar la fórmula del plano tangente a un punto (x, y, z) del toro utilizando esta descripción.

10. Parametrice, utilizando a r como variable, el "relleno" del toro.

11. Parametrice una banda de Möbius. Sugerencia: utilizando la parametrización del relleno del toro, puede utilizar a r como variable, e ir cambiando a θ en función de ϕ.

12. Parametrice en coordenadas cilíndricas un cilindro y un cono. En cada caso, halle la fórmula del vector normal al plano tangente. Ver qué pasa en el vértice del cono.

13. Parametrice un elipsoide de revolución (i.e. por ejemplo con semiejes a,a, y b).

14. Parametrice explícitamente, en coordenadas adecuadas, una antena parabólica que apunte en la dirección $(1, 1, 1)$. Sugerencia: elejir una base ortonormal de $(1, 1, 1)^\perp$ y tomarlos como sustitutos de los ejes x e y, idem el eje z con $(1, 1, 1)$.

Versiones en más dimensiones

15. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^k$ una función diferenciable. Verifique que $\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in U \times \mathbb{R}^k \ / \ x \in U\}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+k}$ de dimensión n (que admite una carta global). Sea $x_0 \in U$ y $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{Graf}(f)$. Cuál es la fórmula del espacio tangente al gráfico de f en ese punto?

16. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $k < n$ una función diferenciable y $c \in \mathbb{R}^k$ un valor regular, es decir, $f^{-1}(c)$ es no vacío, y para todo $x \in f^{-1}(c)$, la matriz $df|_x$ tiene rango k. Llamemos $M = f^{-1}(c)$. Si $\sigma : (-1, 1) \to f^{-1}(c)$ es una curva diferenciable, componiendo con f y utilizando regla de la cadena, muestre que, para cualquier $t \in (-1, 1)$, vale que $\sigma'(t)$ está en el núcle de $df|_{\sigma(t)}$. Concluya que si $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$, con cada $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (las coordenadas de f), y $p \in M$, entonces las ecuaciones
$$\langle \nabla f_i|_p, (v - p)\rangle = 0\}_{i=1}^k$$
son las ecuaciones del espacio tangente a M en p.

17. Verifique que la ecuación del hiperplano tangente a un punto $p = (p_1, \ldots, p_{n+1})$ de la esfera S^n está dado por $\langle p, (v - p)\rangle = 0$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ con $k < n$, inyectiva, diferenciable, y $df|_x$ de rango máximo para todo $x \in \mathbb{R}^k$. Sea $M = \mathrm{Im}(f)$. Construir (restringiendo a todas las coordenadas salvo una) curvas contenidas en M a partir de f, y concluir que $\{\nabla f_i|x\}_{i=1}^k$ es una base del espacio tangente a M (dentro de $\mathbb{R}^n$).

19. Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ dada por cualquiera de las formas de los ejercicios anteriores (un gráfico, un valor regular, o parametrizada). Verifique que el espacio tangente a M en un punto p se puede realizar como el conjunto de todos los valores posibles de $\sigma'(0)$ donde $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una curva diferenciable tal que $\sigma(0) = p$. En rigor, esta construcción realiza al "espacio paralelo al tangente a M en p que pasa por el origen".