Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre 2004
Práctica Tres

1. Sea M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_p(M)$ un vector tangente. Probar que existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$.

2. Sea $p \in M$, X un campo definido en un entorno de p tal que $X(p) \neq 0$. Probar que existe una carta (U, φ), con U incluido en el dominio de X, tal que $X|_U = \frac{\partial}{\partial \varphi^1}$.

3. Sea $p \in M$, $X_1, \ldots, X_k$ campos definido en un entorno de p tales que $\{X_1(p), \ldots, X_k(p)\}$ es un conjunto l.i. en T_pM. Probar que existe un entorno U de p tal que $\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\}$ es un conjunto l.i., para todo $q \in U$.

4. Sea X un campo en M, y lo consideramos como derivación $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, $f \mapsto X(f)$ por la fórmula
$$(X(f))(p) := X(p)(f)$$
Si Y es otro campo, y lo consideramos como derivación, verificar a través de un ejemplo que $X \circ Y$ no es necesariamente una derivación, pero sin embargo $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ si lo es.

5. Consideremos $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de coordenadas alrededor de un punto p de una variedad n-dimensional. Verificar que los campos $X_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ satisfacen $[X_i, X_j] = 0\ \forall i, j$.

6. Sea $M = \mathbb{R}^2$. Identificando T_pM con M de la manera natural, probar que no existe una carta (U, ϕ) tal que los campos $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi^2}$ coincidan respectivamente con los campos $(x, y) \mapsto (1, 0)$, $(x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$.

7. Probar que si $M = S^1$, TM es difeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

8. Probar que los campos vectoriales sobre una variedad tienen estructura de álgebra de Lie, es decir, que el corchete de Lie verifica que es antisimétrico: $[X, Y] = -[Y, X]$, y satisface la igualdad de Jacobi:
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}$$

9. Sea G un grupo de Lie. Para $g \in G$, notamos $L_g : G \to G$ el difeomorfismo $L_g(h) = gh$. Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo. Decimos que es *invariante a izquierda* si $\forall g, h \in G$ se tiene $(dL_g)(X(h)) = X(gh)$. Es decir, si $(dL_g)X = XL_g$.
   a) Definir *campo invariante a derecha*.
   b) Probar que si dos campos invariantes a izquierda coinciden en un punto entonces coinciden en todo G.
   c) Probar que combinaciones lineales de campos invariantes a izquierda son invariantes a izquierda.
   d) Probar que si $v \in T_g(G)$, existe un único campo invariante a izquierda X tal que $X(g) = v$.
   e) Deducir que hay un isomorfismo entre $T_g(G)$ y el espacio de campos invariantes a izquierda.

   La notación usual es $\mathfrak{g} = T_e(G)$, donde $e \in G$ es el elemento neutro.

10. Probar que si G es un grupo de Lie y X, Y son campos invariantes a izquierda entonces $[X, Y]$ es invariante a izquierda. Deducir que $\mathfrak{g}$ hereda una estructura de (sub)álgebra de Lie de $\mathfrak{X}$.

11. Sea $(\mathfrak{g}, [,])$ un álgebra de Lie. Si $\dim \mathfrak{g} = 1$, entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana. Si $\dim \mathfrak{g} = 2$ demuestre que, o bien $\mathfrak{g}$ es abeliana, o bien existe una base $\{x, y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[x, y] = x$.

12. Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ y definamos $[v, w] := v \times w$. Verificar que es un álgebra de Lie.

13. Probar que todo grupo de Lie es paralelizable. Probar que si $G = S^1$, TG es difeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

14. Probar que S^3 es paralelizable, idem el toro T^n.

15. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Un par de campos $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se dicen *f-relacionados* si $Y(f(p)) = (df)(X(p))\ \forall p \in M$, es decir, si $Yf = (df)X$. Notamos $X \sim_f Y$.
   a) Probar que si c es una curva integral de X entonces fc es una curva integral de Y.
   b) Probar que si $X_i \sim_f Y_i$ ($i = 1, 2$) entonces $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.
   c) Probar que $X \sim_f Y$ si y solo si (para todo abierto $U \subseteq N$ y toda $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se satisface $Y(g)f = X(gf)$ en $f^{-1}(U)$), si y solo si (para toda $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$ se satisface $Y(g)f = X(gf)$ en $f^{-1}(N)$).

16. *a*) Consideremos $\pi : TM \to M$ la proyección canónica. Probar que π es diferenciable de rango constante. Deducir que T_pM es una subvariedad de TM.
   b) Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad. Identificamos $T_pM = (di)_p(T_pM) \subseteq T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$. Tomamos $F : TM \to \mathbb{R}$, $F(v) =< v, v >$, producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Probar que $T_1M := F^{-1}(1)$ es una subvariedad de TM de dimensión $2 \dim M - 1$.

17. En cada uno de los siguientes casos probar que $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ es un grupo uniparamétrico y calcular su generador $X \in \mathfrak{X}(M)$
   a) $M = V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (de dimensión finita) y $\phi(t, v) = ta + v$, con $a \in M$ fijo.
   b) $M = T^2 = S^1 \times S^1$, $\phi(t, z, w) = (e^{2t}z, e^{-t}w)$.
   c) $M = \mathrm{GL}_2$, $\phi(t, A) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$.
   d) $M = S^1 \times \mathbb{R}$, $\phi(t, z, x) = (e^{tx}, z)$.

18. Si (U, φ) es una carta de M, calcular una curva integral del campo $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}$.

19. En cada uno de los siguientes casos calcular el grupo uniparamétrico generado por el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$
   a) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ (vía la identificación $T_x\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$).
   b) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.
   c) $M = \mathrm{GL}_n$, $X(A) = BA$, con $B \in M_n(\mathbb{R})$.

20. Sea M una variedad, $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo, $c : (a, b) \to M$ la curva integral maximal tal que $c(0) = p$. Si $\exists t \neq 0$ tal que $c(t) = p$, probar que $(a, b) = \mathbb{R}$.