Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre 2004
Práctica cuatro

1-FORMAS

1. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, se define
$$(df)_p(X) := X_p(f)$$
Esta formula provee, para cada $p \in M$, un elemento del dual de T_pM, por lo tanto es una sección al fibrado cotangente de M. Mostrar que en un sistema de coordenadas, df se escribe como $df = \sum_i \partial_i f dx_i$, por lo tanto df es una sección diferenciable, es decir, una 1-forma.

2. Sea $\eta \in \Omega^1(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, mostrar que $f\eta \in \Omega^1(\mathbb{R})$. Mostrar que si $g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, entonces $d(fg) = fdg + gdf$.

3. Sea $M = \mathbb{R}^n$, que en cada punto su tangente es $\mathbb{R}^n$, con su producto interno usual. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, y definamos $\langle X, - \rangle$ de la manera siguiente: si $v \in T_pM$, $\langle X, v \rangle := \langle X_p, v \rangle$. Mostrar que $\langle X, - \rangle$ es una uno forma. Mostrar que toda uno-forma es de esta forma. Por ejemplo, $df = \langle \nabla f, - \rangle$.

ALGEBRA MULTILINEAL

A partir del segundo ejercicio de esta sección, $\mathbb{K}$ será un cuerpo de característica 0 (se puede suponer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), los espacios vectoriales serán $\mathbb{K}$-e.v. y de dimensión finita.

1. Sean $E \to B$ y $E' \to B$ dos fibrados vectoriales, con abiertos trivializantes $\{U_i\}_{i\in I}$ y funciones de transición $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \, \mathrm{GL}(V)$ y $\phi'_{ij} : U_i \cap U_j \, \mathrm{GL}(V')$ respectivamente. Verificar que $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \, \mathrm{GL}(V \otimes V')$ definidas por $\Phi_{ij}(u) := \phi_{ij}(u) \otimes \phi'_{ij}(u)$, verifican
$$\Phi_{ij}(u) = \Phi_{ji}(u)^{-1}$$
$$\Phi_{ki}\Phi_{jk}\Phi_{ij}(u) = \mathrm{id}_{V\otimes V'}$$
y por lo tanto definen un fibrado, que llamamos $E \otimes E'$.
2. Sea V un espacio vectorial, ϕ y ψ en V^*. Mostrar que la aplicacion $(v, v') \mapsto \phi(v)\psi(v')$ es una aplicación bilineal definida en $V \times V$ a valores en k. Mostrar que bajo la identificación $\mathrm{Bil}(V \times V, k) \cong (V \times V)^* \cong V^* \otimes V^*$, esta forma bilineal se corresponde con $\phi \otimes \psi$.
3. Sea $V = \mathbb{K}^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ la base dual. Consideremos una matriz $A = (a_{ij})$ en $\mathbb{K}^{n\times n}$ y la forma bilineal asociada:
$$b_A((v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n)) := \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$
Mostrar que $f_A = \sum_{ij} a_{ij} e^i \otimes e^j$.
4. Sea V un espacio vectorial, V^* su dual, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{v^1, \ldots, v^n\}$ la base dual. Sea $\mathrm{ev} : V^* \times V \to k$ la evaluación, es decir, $\mathrm{ev}(\phi, v) = \phi(v)$. Mostrar que ev es bilineal, y que, identificando a los elementos de V como elementos de V^{**}, $\mathrm{ev} = \sum_i v_i \otimes v^i$. En particular, el elemento $\sum_i v_i \otimes v^i \in V^* \otimes V$ no depende de la base tomada. Muestre este hecho directamente.
5. Consider el isomorfismo $V^* \otimes V \cong \mathrm{End}(V)$ dado por $\phi \otimes v \mapsto (w \mapsto \phi(w)v)$. Que transformacion lineal conocida es el elemento $\sum_i v_i \otimes v^i$?

6. Sea $\mathbb{S}_n = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}$ el grupo simétrico en n elementos. Si $f : V \times \cdots \times V \to k$ es n-multilineal, decimos qu f es **simétrica** si $f(v_1,\dots,v_n) = f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)})$ para todo $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Diremos que f es **antisimétrica** si $f(v_1,\dots,v_n) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)})$ para todo $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Muestre que el conjunto de funciones simétricas es un subespacio de las multilineales, idem para las antisimétricas, y ambos estan en suma directa. Calcular la dimensión de estos espacios en término de n y $\dim(V)$. Mostrar que si $n = 2$, estos dos subespacios generan todas las funciones bilineales. Para $n > 2$ (y $\dim(V) > 1$) no.
7. Sea $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n] = \{\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{K}\}$ el álgebra de grupo. Definimos en $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ los elementos $S_0 = \frac{1}{n!}\sum_\sigma \sigma$ y $S_1 = \frac{1}{n!}\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma$. Probar que $S_i^2 = S_i$ ($i = 0,1$); $S_0 S_1 = 0 = S_1 S_0$.
8. Sea $f : V^{\times n} \to W$ una función multilineal; definimos
$$\begin{aligned} S(f)(v_1,\dots,v_n) &:= \tfrac{1}{n!}\textstyle\sum_\sigma f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)}) \\ \operatorname{Alt}(f)(v_1,\dots,v_n) &:= \tfrac{1}{n!}\textstyle\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$
Mostrar que $S(S(f)) = S(f)$, $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(f)) = \operatorname{Alt}(f)$, $S(\operatorname{Alt}(f)) = 0 = \operatorname{Alt}(S(f))$. Además, f es simétrica (respectivamente antisimétrica) si y sólo si $f = S(f)$ (resp. $f = \operatorname{Alt}(f)$).
9. Sea V un espacio vectorial, y dejamos actuar a $\mathbb{S}_n$ en $V^{\otimes n}$ por la fórmula $\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) := v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$. Denotamos $S^n(V) = S_0(V^{\otimes n})$ y $\Lambda^n(V) = S_1(V^{\otimes n})$. Mostrar que si $f : V \to V'$ es una transformacion lineal, entonces $f^{\otimes n} : V^{\otimes n} \to V'^{\otimes n}$ dado por $f^{\otimes n}(v_1,\dots,v_n) = f(v_1) \otimes \ldots \otimes f(v_n)$ se restringe bien a $S^n(V)$ y $\Lambda^n(V)$. Esta construcción es funtorial, es decir, si $g : V' \to V''$, entonces $S^n(g\circ f) = S^n(g)\circ S^n(f)$ y $S^n(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{S^n(V)}$. Idem para $\Lambda^n(V)$.
10. Calcular la dimensión de $\Lambda^n(V)$ en términos de n y de $\dim V$. Mostrar que $\dim(\Lambda^{\dim(V)}V) = 1$, y que si $f : V \to V$ entonces $\Lambda^{\dim(V)}f)$ es la multiplicación por $\det(f)$. Concluir la fórmula $\det(fg) = \det(f)\det(g)$.
11. Mostrar que $\Lambda^k(V^*) \cong \operatorname{Alt}^k(V,k) := \{f : V^{\times k} \to k \ / \ f \text{ es antisimétrica}\}$.
12. Utilizar la funtorialidad de Λ^k para definir, para un fibrado $E \to B$, el fibrado "$\Lambda^k(E)$".
13. Si V, W son espacios vectoriales con bases $\{v_i \mid i = 1,\dots,n\}$, $\{w_j \mid j = 1,\dots,m\}$ respectivamente, y $f : V \to W$ un morfismo lineal, se denotan $f^{i_1,\dots,i_d}_{j_1,\dots,j_d}$ los coeficientes matriciales, de $(f\otimes\cdots\otimes f) : V^{\otimes d} \to W^{\otimes d}$, es decir,
$$f(v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_d}) = \sum_{j_1,\dots,j_d} f^{i_1,\dots,i_d}_{j_1,\dots,j_d} w_{j_1}\otimes\cdots\otimes w_{j_d}$$
Calcular $f^{i_1,\dots,i_d}_{j_1,\dots,j_d}$.

K-FORMAS

1. Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable entre dos variedades. Sea $\alpha \in \Gamma((T^*Y)^{\otimes r})$ un campo de covectores de grado r, al que identificamos, en cada $y \in Y$, con un campo de aplicaciones multilineales $T_yY \times \cdots \times T_yY \to \mathbb{R}$.

   Probar que f induce un campo de covectores de grado r, $f^*(\alpha) \in \Gamma((T^*X)^{\otimes r})$, que vía la identificación anterior se define por
$$f^*(\alpha)(x)\big(v_1,\dots,v_r\big) = \alpha(f(x))\big(df(x)(v_1),\cdots,df(x)(v_r)\big).$$
   Si (U,φ) es una carta de X alrededor de x, (V,ψ) es una carta de Y alrededor de $y = f(x)$, $f(U) \subseteq V$ y α se escribe localmente como
$$\alpha(x) = \sum_{1\le i_1,\dots,i_r\le n} a_{i_1,\dots,i_r}(x)\, d\psi_{i_1}\otimes\cdots\otimes d\psi_{i_r},$$

encontrar las coordenadas de $f^*(\alpha)$ en la base $d\varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes d\varphi_{i_r}$. Probar que si α es un campo de covectores simétricos (resp. antisimétricos), $f^*(\alpha)$ también lo es.

2. Sea X una variedad, ω una 1-forma. Sean (U,φ), (V,ψ) dos cartas alrededor de un punto $x\in X$. Si $\omega(x)=\sum_i \alpha_i d\varphi_i=\sum_i \beta_i d\psi_i$, encontrar la relación entre los α_i y los β_i.
3. Si ω es una k-forma, ¿es cierto que $\omega\wedge\omega=0$? ¿Y si $\dim X=3$?
4. Sea X una variedad diferenciable, (U,φ) una carta y $\omega\in\Omega^p(X)$. Calcular $d\omega|_U$ en las coordenadas de (U,φ) para los casos $0\le p\le 2$.
5. Mostrar que $d(\eta\wedge\omega)=d(\eta)\wedge\omega+(-1)^{|\eta|}\eta\wedge d(\omega)$.
6. Sea $\omega\in\Omega^p(X)$. Probar que

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\ldots,X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}X_i\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{p+1}) \\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{p+1}). \end{aligned}$$

7. Sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable ("clásico").
   a) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v):=\langle F(x),v\rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx,dy,dz\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, probar que ω determina un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^1=\omega$.
   b) Demostrar ahora que $\omega_F^2(x)(u,v):=\langle F(x),u\times v\rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Calcular sus coordenadas en la base $\{dx\wedge dy,dz\wedge dx,dy\wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^2=\omega$.
   c) Sea $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)=\Omega^0(\mathbb{R}^3)$. Encontrar la relación entre
      1) df y ∇f,
      2) $\nabla\times F$ y $d\omega_F^1$,
      3) $\nabla\cdot F$ y $d\omega_F^2$ (aquí identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3)\simeq\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ usando la base $dx\wedge dy\wedge dz$).

   Concluir, usando la relación $d^2=0$, las fórmulas $\nabla\times\nabla(-)\equiv 0$ y $\nabla\cdot\nabla\times(-)\equiv 0$.
8. Sea $M=\mathbb{R}^4$, denotando a sus puntos con letras (t,x,y,z). Escribir explícitamente las formulas para d en la base de las formas dada por $\{dt,dx,dy,dz\}$, $\{dt\wedge dx,dt\wedge dy,dt\wedge dz,dy\wedge dz,dz\wedge dx,dx\wedge dy\}$, $\{dt\wedge dy\wedge dz,dt\wedge dz\wedge dx,dt\wedge dx\wedge dy,dx\wedge dy\wedge dz\}$, $\{dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz\}$. Buscar en algun libro de electromagnetismo las ecuaciones de Maxwell y compare.

ORIENTABILIDAD

1. Un fibrado vectorial $Y\to X$ de dimensión d se dice *orientable* si existe una sección continua nunca nula de Λ^dY. Una variedad se dice *orientable* si su fibrado tangente lo es. Probar que una variedad es orientable si y solo si su fibrado cotangente lo es.
2. Sea M una variedad y TM su fibrado tangente. Probar que TM es orientable.
3. Probar que si M tiene un atlas de la forma $\mathcal{A}=\{(U,x);(V,y)\}$ donde $U\cap V$ es conexo, entonces M es orientable.
4. Ver que si M es paralelizable, es orientable.
5. Sea M y N variedades diferenciables. Probar que son equivalentes:
   a) M y N son orientables
   b) $M\times N$ es orientable
6. Probar que la esfera S^n y $\mathbb{R}^n$ son orientables. Probar que el n-toro T^n y el cilindro son orientables.
7. Sea M una variedad orientable conexa y $f:M\to M$ un difeomorfismo. Si $\mathcal{A}$ es un atlas orientado compatible con la orientación, probar que para dos cartas $(U_i,\varphi_i)\in\mathcal{A}$ $(i=1,2)$ el signo de $J(\varphi_2\circ f\circ\varphi_1^{-1})$ es constante (donde está definida la composición). Interpretar.