Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre 2004
Práctica cinco

INTEGRACIÓN Y TEOREMA DE STOKES

1. Sea F un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, $F(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$, y consideremos la $n-1$-forma $\omega_f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^i f_i(x) dx_1 \wedge \cdots \widehat{i} \cdots \wedge dx_n$. Sea ahora M un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\overline{M}$ es una variedad con borde. Verificar que el teorema de Stokes para M y ω_f: $\int_{\partial M} \omega_f = \int_M d(\omega_f)$ coincide, cuando $n = 3$ con el teorema de la divergencia de Gauss, y cuando $n = 2$ con el teorema de Green.
2. Sea M una variedad, S una subvariedad de M compacta sin borde y orientada de dimensión k. Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que $d\omega = 0$.
   - Si $S = \partial W$ para alguna subvariedad W (de dimensión $k+1$) de M mostrar que $\int_S \omega = 0$. Concluir que si $\widetilde{S}$ es otra subvariedad (compacta sin borde de dimensión k) tal que existe una subvariedad con borde W con $\partial W = S \coprod \widetilde{S}^{\text{op}}$, donde $\widetilde{S}^{\text{op}}$ es la misma variedad $\widetilde{S}$ pero con la orientación opuesta, entonces $\int_S \omega = \int_{\widetilde{S}} \omega$.
   - Si $\omega = d\eta$ para cierto $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$, entonces $\int_S \omega = 0$. Concluir que si ω' es tal que $d\omega' = 0$ y $\omega - \omega' = d\eta$ entonces $\int_S \omega = \int_S \omega'$.
3. Sea $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ un abierto, y $f : U \to \mathbb{C}$ una función diferenciable holomorfa. Recordemos que si escribimos $z = x + iy$ y $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, la condición $f'(z)$ calculada como límite con $\Delta z = \Delta x$ o bien con un $\Delta z = i\Delta y$ conduce a la condición de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Si $c : [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$ es una curva diferenciable, recordemos que la integral sobre c se definía como,
$$\int_c f(z)dz := \int_a^b u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \int_a^b v(x,y)dx + u(x,y)dy$$
Sea $\omega := u(x,y)dx - v(x,y)dy$ y $\eta := v(x,y)dx + u(x,y)dy$ en $\Omega^1(U)$. Mostrar que la condición de Cauchy Riemann equivale a $d\omega = 0 = d\eta$. concluir que si c y c' son dos curvas cerradas orientadas tales que existe un dominio D con $\partial D = c \coprod c'^{op}$ entonces $\int_c f(z)dz = \int_{c'} f(z)dz$. En particular, si $c = \partial D$ entonces $\int_c f(z)dz = 0$. Supongamos que existe $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g'(z) = f(z)$. Muestre entonces que existen $h_1, h_2 : U \to \mathbb{R}$ tales que $dh_1 = \omega$ y $dh_2 = \eta$. Concluya que si c es una curva cerrada, entonces $\int_c f(z)dz = 0$.
4. Sea M una variedad compacta orientable (de dimensión n) y ω una forma de volumen. Probar que $\omega \neq d\eta$ para todo $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$.
5. Sea $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\omega(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^n \frac{dx_1 \wedge \cdots \widehat{i} \cdots \wedge x_n}{|x|^n}$. Muestre que $d\omega = 0$, pero no existe ningún $\eta \in \Omega^{n-2}(M)$ tal que $d\eta = \omega$. (Sugerencia: para $d\omega = 0$ haga la cuenta, para $\omega \neq d\eta$ considere S^n e integre $\omega|_{S^n}$.)
6. Sea $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ la función $f(z) = 1/z$. Escriba las formas ω y η correspondientes (ver ejercicio 3). Utilice el ejercicio anterior para ver que no existe $g : U \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = g'(z)$.
7. Sea $(M, \langle -,- \rangle)$ un avariedad Riemanniana de dimensión n, es decir, $\langle -,- \rangle : M \to S^2(TM)$ es una sección diferenciable tal que $\langle -,- \rangle_p : T_pM \to T_pM \to \mathbb{R}$ es un producto interno para todo $p \in M$. Supongamos M orientable, y para cada $p \in M$ definimos $\omega \in \Omega^n(M)$ por $\omega_p(v_1,\ldots,v_n) = 1$ si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una b.o.n. de $T_p(M)$ orientada positiva. Muestre que la definición de ω no depende de la base ortonormal (orientada positiva) elegida. Si (U,ϕ) es un sistema de coordenadas alrededor de p, orientado positivamente, entonces

$\omega_p = \sqrt{g} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, donde $g = \det(g_{ij})$, y $(g_{ij})_{ij}$ es la matriz dada por $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$. En particular ω es C^∞. Por definición ω se la denomina *la* forma de volumen de M, y el volumen de $(M, \langle -, - \rangle)$ se define como $\int_M \omega$.

Observe que la forma de volumen de $\mathbb{R}^n$ dada en el ejercicio anterior es la esperada. Calcule la matriz g y la forma de volumen ω para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ en coordenadas polares y cilíndricas. Calcule la matriz de g y ω para S^1 y S^2 (en coordenadas angulares) y calcule los respectivos volúmenes. Idem para la parametrización del toro (ver ejercicio 8 práctica 2).

8. Sea M una variedad, ω su forma de volumen, f una función, X un campo vectorial, y S una subvariedad de M de codimensión uno, orientada. Se definen
   - $\int_M f := \int_M f\omega$.
   - el **flujo** de X a través de S como $\int_S X := \int_S i_X \omega$. Notar la restricción de $i_X(\omega)$ a S tiene el grado correcto para ser integrado en S.
   - La **divergencia** de X a través de la fórmula $(\nabla \cdot X)\omega = d(i_X(\omega))$.

   Hallar la expresión local para $\nabla \cdot X$ (en particular, esto mostrará que $\nabla \cdot X \in C^\infty(M)$). Mostrar que si U es un abierto de M tal que $S = \partial U$, entonces $\int_S X = \int_U \nabla \cdot X$. Mostrar que la n-1-forma asociada a un campo de $\mathbb{R}^n$ dada en el ejercicio uno de esta práctica es justamente $i_X \omega$ para ω la forma de volumen standard de $\mathbb{R}^n$.
9. Sea $(M, \langle -, - \rangle)$ una variedad Riemaniana orientada y X un campo vectorial. Explicitar en términos de coordenadas locales la expresión para $\nabla \cdot X$ con respecto a *la* forma de volumen. Calcular la divergencia de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ (resp. en $\mathbb{R}^3$) en coordenadas polares (resp. esféricas). Utilizar el teorema de la divergencia para demostrar la siguente frase: "Sea $V(x, y, z)$ la velocidad de un fluido en un punto (x, y, z); este fluido es incompresible si y sólo si verifica la ecuación $\nabla \cdot V = 0$".
10. El agua (a diferencia del aire), es casi imposible de comprimir. Supongamos que tenemos una taza (con simetría cilíndrica) con agua, que revolvemos con una cucharita, hasta hacerla tomar una velocidad angular dada. Si después de un instante de acomodamiento suponemos que el agua gira en los planos horizontales, la velocidad del fluido será $v(x, y, z) = v(r, \theta, z) = v(r, z)\frac{\partial}{\partial \theta}$. Escribir la condición $\nabla \cdot V = 0$ en estas coordenadas.
11. Sea $(M, \langle -, - \rangle)$ una variedad Riemaniana orientada de dimensión n con forma de volumen $\omega \in \Omega^n(M)$, X un campo vectorial y S una subvariedad de M de codimensión uno orientada con forma de volumen $\omega_S \in \Omega^{n-1}(S)$. Sea $p \in S$ y $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base orientada de T_pS según S (es decir, $\omega_S(v_1, \ldots, v_{n-1}) = 1$). Sea $\widehat{n}$ el único vector de T_pM tal que $\langle \widehat{n}, - \rangle = \omega(v_1, \ldots, v_{n-1}, -)$. Notar que la norma de $\widehat{n}$ es necesariamente uno. Convencerse la aplicación $p \mapsto \widehat{n}$ es diferenciable. Muestre que si $X = X_S + \langle X, \widehat{n} \rangle \widehat{n}$ es la descomposición ortogonal de X según $T_pM = T_pS \oplus (T_pS)^\perp$, entonces $i_X(\omega)(p) = i_{X_S}\omega + \langle X(p), \widehat{n} \rangle \omega_S$. Mostrar que $i_{X_S}(\omega)$ restringida a S es idénticamente nula y por lo tanto el flujo de X a través de S se puede calcular como $\int_S i_X(\omega) = (-1)^{n-1} \int_S \langle X, \widehat{n} \rangle \omega_S$.
12. Sea $(M, \langle -, - \rangle)$ una variedad Riemaniana orientada y X un campo vectorial. Consideramos la uno forma $\eta_X := \langle X, - \rangle$. Para cada subvariedad de dimensión uno orientada c de M se define la **circulación** de X en c como
$$\int_c X := \int_c \eta_X.$$
   Sea $M = \mathbb{R}^3$, X un campo consideramos el campo rotor $\nabla \times X$ como el definido a través de la fórmula clásica en coordenadas cartesianas. Mostrar que $i_{(\nabla \times X)}\omega = d(\eta_X)$. Concluir que si S una subvariedad (embebida) orientada con borde de dimensión 2 y $c = \partial S$, entonces el flujo del rotor (con la definición del ejercicio anterior) de X en S es igual a la circulación de X en c. Si tiene ganas, puede utilizar la fórmula $i_{(\nabla \times X)}\omega = d(\eta_X)$ para obtener la expresión del rotor en coordenadas cilíndricas, o polares.