**Geometría Diferencial**
Segundo Cuatrimestre 2004
Práctica seis

## OPERACIONES CON FORMAS DIFERENCIALES

1. (derivada de Lie de formas). Sea $X$ un campo y $\omega$ una $k$-forma. Se quiere definir $\mathcal{L}_X(\omega)$ con las siguientes propiedades:
   a) $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta)$ (sin signos!);
   b) $\mathcal{L}_X(d\omega) = d(\mathcal{L}_X(\omega))$;
   c) $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$ si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

   Demuestre que estas propiedades determinan unívocamente a $\mathcal{L}_X$. Muestre que $\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}$. Halle la expresión en coordenadas locales.

2. Recordar que $i_X(\omega) := \omega(X, \dots)$ si $\omega \in \Omega^k(M)$ con $k > 0$ e $i_X(f) = 0$ para $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Muestre las siguientes identidades, para $X$ e $Y$ campos, y $f$ función diferenciable:
   a) $i_X i_Y = -i_Y i_X$
   b) $i_{fX} = f i_X$.
   c) $i_X d + d i_X = \mathcal{L}_X$ (hay dos posibilidades: o bien demuestre esto directamente a partir de una expresión local (largo y cuentoso), o bien demuestre que $\mathcal{L}_X$ definido como $i_X d + d i_X$ verifica las propiedades del ejercicio anterior (manera corta y elegante)).
   d) $L_{fX} = f L_X + df \wedge i_X$
   e) $\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = i_{[X,Y]}$ (sugerencia: ver que esta formula es válida aplicada a una $f$, también es válida aplicada a $df$, y finalmente ver que $(\mathcal{L}_X i_Y - i_Y\mathcal{L}_X)(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X)(\omega) \wedge \eta + (-1)^{|om|} \omega \wedge (\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X)(\eta)$ para deducir la fórmula general por induccion en $|\omega|$).

## 1. UN POCO DE ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

1. Sea
$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_1"] & V_2 \arrow[d, "f_2"] \\ C_1 \arrow[r, "\partial"] & C_2 \end{tikzcd}$$
un diagrama conmutativo de espacios vectoriales y transformaciones lineales, es decir, $f_2 d = \partial f_1$. Muestre que $f_1(\mathrm{Ker}(d)) \subset \mathrm{Ker}(\partial)$ y que $f_2(d(V)) \subset \partial(C)$. Concluir que si $f : (V_*, d) \to (C_*.\partial)$ es un morfismo de complejos, entonces $f$ induce morfismos $f_n : Z_n(V) \to Z_n(C)$ $f_n : B_n(V) \to B_n(C)$ y $f_n : H_n(V) \to H_n(C)$.
2. Sean $((C_n)_{n\in\mathbb{Z}}, d_n : C_n \to C_{n+1})$ $((C'_n)_{n\in\mathbb{Z}}, d'_n : C_n \to C_{n+1})$ dos complejos y $s_n : C_n \to C'_{n-1}$ una familia de aplicaciones lineales. Mostrar que $f_n := s_{n+1} d_n + d'_{n-1} s_n$ define un morfismo de complejos, y que el morfismo inducido en homologia es nulo. Concluir que $\mathcal{L}_X$ actua trivialmente en la cohomología de de Rham.
3. Sea $(\alpha, \beta, \gamma)$ un morfismo de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] & N \arrow[r, "q"] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   Ver que esto induce una sucesion exacta:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\partial} M/Im(\alpha) \to N/Im(\beta) \to T/Im(\gamma) \to 0$$

Donde los morfismos (salvo $\partial$) son los obvios inducidos por $i$, $p$, $j$, $q$. El morfismo $\partial : \mathrm{Ker}(\gamma) \to M/Im(\alpha)$ proviene de considerar el diagrama conmutativo con columnas exactas

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r, "i|"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[r, "p|"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\gamma) \arrow[d] \arrow[d, dashed, shift right] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[d, dashed, shift right] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[l, dashed, shift left] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d] \arrow[d, dashed, shift left] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d] \arrow[l, dashed, shift left] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & M/Im(\alpha) \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d] & N/Im(\beta) \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d] & T/Im(\gamma) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

y hacer un camino en zig-zag (o serpenteante) desde $\mathrm{Ker}(\gamma)$ hasta $M/Im(\alpha)$.

4. Enuncie y demuestre el siguente enunciado: "Una suceciónexacta corta de complejos induce una sucesión exacta larga de sus homologías"

## 2. Aplicaciones al complejo de de Rham

1. (Sucesión de Mayer - Vietoris) Sea $M$ una variedad, $U$ y $V$ dos abiertos tales que $M = U \cup V$. Consideramos las aplicaciones restriccion

$$\Omega^k(M) \to \Omega^k(U)\ ,\ \ \Omega^k(M) \to \Omega^k(V),$$
$$\Omega^k(U) \to \Omega^k(U \cap V)\ ,\ \ \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V).$$

Observar que si se tiene definida una forma en $U$ y otra en $V$ de manera tal que coinciden en $U \cap V$, entonces queda definida por esos datos una forma en $M$. Interpretar esta observación en términos de la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{|_U - |_V} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{|_{U\cap V}} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

deducir de la conmutatividad de la restricción con el diferencial una sucesión exacta corta de los complejos de de Rham respectivos. Escribir la suceción exacta larga asociada para $H^*(U)$, $H^*(V)$, $H^*(U \cap V)$, y $H^*(M)$.

2. Utilizar la sucesión exacta larga de Mayer - Vietoris para calcular $H^*_{dR}(M)$ donde $M$ es $S^n$, $\mathbb{R}P^n$, $T^2$, $\mathbb{R}^2$ menos dos puntos, $\mathbb{R}^3$ menos un punto y una recta, etc.