Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre 2004
Práctica siete

CONEXIONES

1. Sea ∇ una conexión sobre una variedad M, y sea
$$T : \mathfrak{X}M \otimes \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M, \quad T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$
su torsión. Probar que T es $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilineal.

2. Probar que el espacio de conexiones de una variedad es un espacio afín. En particular, probar que:
   a) Una combinación lineal $\sum_i \alpha_i \nabla^i$, donde los ∇^i son conexiones y $\sum_i \alpha_i = 1$, es una conexión.
   b) La diferencia entre dos conexiones es un tensor.

3. Probar que si (U,φ) es una carta de M, entonces la asignación
$$X \otimes (\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}) \mapsto \sum_i X(\alpha_i) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$
define una conexión en U. En particular, $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$ tiene una conexión standar.

4. Probar que si ∇ es una conexión en M con torsión T, entonces $\nabla - \frac{1}{2}T$ es una conexión simétrica.

5. Sea G un grupo de Lie, y $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una base de campos invariantes a izquierda. Sea ∇ determinada por $\nabla_{X_i} X_j = 0$ para todo i, j. Demuestre que esta definición es independiente de la base de campos invariantes elegida. Calcule la torsión de esta conexión.

1. VARIENDADES RIEMANNIANAS

1. Recordar que conexión se dice que deja invariante a una métrica $\langle -,- \rangle$ si se verifica:
$$Z(\langle X,Y \rangle) = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$$
Suponiendo que la torsión de ∇ es cero, desarrolle la combinación
$$Z\langle X,Y \rangle + Y\langle Z,X \rangle - X\langle Y,Z \rangle$$
en términos de ∇, $\langle -,- \rangle$, y los corchetes de Lie. Deduzca que los símbolos de Cristoffel se despejan a partir de los coeficientes de la métrica y sus derivadas (en particular están determinados por ésta). Despéjelos. Debería llegar a la fórmula
$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell}(g_{\ell i,j} + g_{\ell j,i} - g_{ij,\ell})$$
(donde se sobre-entiende suma sobre ℓ; g^{ij} son los coeficientes de la matriz inversa de g_{ij}; $g_{ij,k} = \partial_k(g_{ij})$.)
   Notar que esta cuenta no depende de la definición positiva de la métrica, por lo tanto, demuestre que dada M una variedad con una forma bilineal simtrica no degenerada $\langle -,- \rangle$, siempre existe una única conexión ∇ sin torsión que deja invariante la forma $\langle -,- \rangle$.
2. Notar que la conexión standar de $\mathbb{R}^n$, es invariante con respecto a la métrica standar, y coincide con la conexión standar como grupo de Lie con la suma. Calcule los símbolos de Cristoffel de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas polares y esféricas. Calcule los símbolos de Cristoffel de la esfera S^2 como subvariedad de $\mathbb{R}^3$ con la métrica inducida.

3. Considerar el toro parametrizado con radios R y r, como subvariedad Riemanniana de $\mathbb{R}^3$. Hallar los símbolos de Cristoffel de la comexión de Levi-Civita para las coordenadas (θ, ϕ). Interpretando ahora el toro como el grupo de Lie $S^1 \times S^1$, calcule los símbolos de Cristofel para la conexión standard de un grupo de Lie. Coincide con la anterior?
4. $\mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) : \ y > 0\}$ (semiplano de Poincaré). Con respecto a la carta usual $(\mathbb{R}^2_+, \mathrm{id})$ consideramos la métrica $g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy$. Expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.
5. Calcular la conexión de Levi-Civita para la métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada, con respecto a la carta usual, por $g_{ii} = 1$ si $1 \leq i \leq n$ y $g_{n+1,n+1} = -1$.
6. Sea M una subvariedad de codimensión 1 de $\mathbb{R}^n$. Sea g la métrica canónica en $\mathbb{R}^n$, sea g_M la métrica inducida por g en M, y sea ∇ la conexión asociada a g_M. Probar que para campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_X Y$ coincide con la proyección ortogonal sobre TM de la derivada de $(di)(Y)$ en la dirección $(di)(X)$, donde $i : M \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión.
7. Probar que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ hereda una métrica de S^n.

2. Transporte paralelo, geodésicas y curvatura

1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y ∇ una conexión en M. Si $c : I \to M$ es una curva diferenciable, $t_0 \in \ I$ y $v_1, \ldots, v_n$ es base de $M_{c(t_0)}$, sean $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}_c^{\|}$ (campos paralelos a lo largo de c) de modo que $X_i(t_0) = v_i$.
   a) Ver que $\mathfrak{X}_c^{\|}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial
   b) $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ son linealmente independientes en $M_{c(t)}$ $\forall\, t \in \ I$
   c) Si $Y \in \mathfrak{X}_c^{\|}$ es tal que $Y(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ entonces $Y(t) = \sum_{i=1}^n a_i X_i(t)$. Deducir la dimensión de $\mathfrak{X}_c^{\|}$.
2. Sea (M, g) una variedad Riemanniana con conexión ∇
   a) Sea $c : I \to M$ una curva. Probar que son equivalentes:
      1) $D|_t(\langle X, Y\rangle) = 0$ si $X, Y \in \ \mathfrak{X}_c^{\|}$
      2) $X, Y \in \ \mathfrak{X}_c$, entonces $D|_t(\langle X, Y\rangle) = \langle \nabla_D X, Y\rangle + \langle X, \nabla_D Y\rangle$
   b) Ver que son equivalentes:
      1) la condición (1-2) de *a*) se cumple para toda curva,
      2) ∇ es compatible con la métrica.
   c) Deducir que si $X, Y \in \mathfrak{X}_c^{\|}$ y ∇ es compatible con la métrica, entonces las normas de X e Y se mantienen constantes y el ángulo entre X e Y también.
3. Escriba la ecuación de geodésica en términos de los símbolos de Cristoffel. Muestre que las geodésicas en $\mathbb{R}^n$ son las rectas, y que las geodésicas en el semiplano de Poincaré son: o bien rectas verticales, o bien semicírculos con centro en el eje x.
4. Muestre que la ecuación de geodésica depende sólo de la parte simétrica de la conexión. Es decir, si ∇ es una conexión y T es un tensor antisimétrico, entonces ∇ y $\overline{\nabla} = \nabla + T$ tienen las mismas geodésicas.
5. Sea (M, ∇) una variedad con conexión. Se define $R : \mathfrak{X}(M)^{\otimes 3} \to \mathfrak{X}(M)$ a través de
$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$
   Muestre que R es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en todas sus variables. A R se lo denomina el tensor de curvatura. Expresar los coeficientes de R en términos de los simbolos de Cristoffel.
6. Sea G un grupo de Lie con su conexión standard. Calcule los coeficientes el tensor de curvatura en términos de la estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$.
7. Calcule los coeficientes del tensor de curvatura para la esfera S^2_R de radio R, para el Toro parametrizado con radios R y r, y para un cilindro.

8. Sean (M, g) una variedad riemanniana y ∇ compatible con g. Sea $c : I \to M$ una curva y $f : J \to I$ un difeomorfismo.
   a) Ver que:
   $$\nabla_D (c \dot{\circ} f)|_t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 t}|_t \dot{c}(f(t)) + (\frac{\partial f}{\partial t})^2 \nabla_D \dot{c}|_{f(t)}$$
   b) Si $\dot{c}(0) \neq 0$, y c y $(c \circ f)$ son geodésicas, entonces $f(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.
9. Sea M una variedad y ∇ una conexión. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, probar que son equivalentes:
   a) $\nabla_X X = 0$ (en este caso decimos que X es paralelo)
   b) Toda curva integral $c : I \to M$ de X es una geodésica.
10. Sea G un grupo de Lie con su conexión standar. Muestre que si X es invariante a izquierda, entonces es paralelo, luego toda curva integral de X es una geodésica. Halle las geodésicas del Toro con la conexión como grupo de Lie
11. Sea G un grupo de Lie con su conexión canónica. Si $c : I \to G$ es una geodésica, entonces existe un campo $X \in L(G)$ tal que c es una curva integral de X.
12. Sea $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ y ∇ la conexión canónica. Probar que la geodésica c tal que $c(0) = I$ y $\dot{c}(0) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es de la forma
   $$c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$