Geometría Diferencial
Versión 2004
Complejos Simpliciales,Triangulaciones y Característica de Euler

Definición 1. Un complejo simplicial K consiste en un conjunto de vértices V y un conjunto S cuyos elementos son subconjuntos finitos no vacíos de V llamados símplices, tal que

(1) Todo subconjunto de exactamente un elemento de V es un simplex.
(2) Todo subconjunto no vacío de un simplex es también un simplex.

Notaremos con v a los vértices de K y con s a los símplices.

Un simplex s que contiene exactamente $n+1$ vértices se llama n-simplex (ó lo que es lo mismo, diremos que $dim\ s = n$). Si $s' \subseteq s$, entonces el simplex s' se llama cara del simplex s y se llamará cara propia si $s' \neq s$. Notar que los 0-símplices son los vértices y que un simplex cualquiera queda determinado por sus 0-caras (los vértices que lo componen).

Ejemplos 2. (1) Sea A un conjunto. Podemos construir un complejo simplicial a partir de A tomando el conjunto A como los vértices y a todos los subconjuntos finitos no vacíos de A como los símplices.
(2) Sea s un simplex de un complejo simplicial K. Podemos considerar a s como un complejo simplicial donde los símplices son todas las caras de s. Este complejo se nota $\overline{s}$.
(3) Idem ejemplo anterior, pero tomando las caras propias de s. Este complejo se nota $\dot{s}$.
(4) Si K complejo simplicial, podemos definir el complejo simplicial K^n que consiste en todos los símplices de dimensión menor o igual a n. Este complejo se llama el n-esqueleto de K.

Definición 3. Decimos que la dimensión de un complejo simplicial K es n si K posee n-símplices pero no tiene $(n+1)$-símplices. La dimensión es infinita si K tiene n-símplices para todo n natural. La dimensión es -1 si K es el complejo simplicial vacío.

Decimos que K es finito si contiene una cantidad finita de símplices. Obviamente si K es finito, su dimensión también es finita, pero la recíproca no es cierta.

Ejemplo 4. El complejo simplicial K cuyos vértices son $V_K = \{a, b, c\}$ y sus símplices son

$$S_K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

tiene dimensión 2, en cambio el complejo simplicial L cuyos vértices coinciden con los de K pero cuyos símplices son

$$S_L = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

tiene dimensión 1. Notar además que $L = \dot{K}$.

Definición 5. Un morfismo simplicial $f : K \to L$ es una función que va desde el conjunto de vértices de K al conjunto de vértices de L tal que $f(s)$ es un simplex en L si s es un simplex de K.

Dado un complejo simplicial K, construiremos dos espacios topológicos a partir de K que tienen el mismo conjunto subyacente, pero uno de ellos será un espacio métrico y el otro tendrá una topología coherente con los símplices que lo componen.

Construcción 6. Sea K complejo simplicial. Sea $|K|$ el conjunto de todas las funciones α (de conjuntos) que van desde el conjunto de vértices de K al intervalo I tales que

(1) Para toda α, el conjunto
$$\{v \in K,\ \alpha(v) \neq 0\}$$
es un simplex de K (en particular, el soporte de α es finito).
(2) $\sum_{v \in K} \alpha(v) = 1$.

El espacio métrico $|K|_d$ consiste en el conjunto $|K|$ con la métrica definida por

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$$

En realidad esta topología no es la que se usa. Vamos a definir la topología coherente (ó débil) en el conjunto $|K|$ de la siguiente manera:

Construcción 7. Dado un simplex s de K, consideremos el simplex cerrado $|s|$, que es el subconjunto de $|K|$ definido por:

$$|s| = \{\alpha, \alpha(v) = 0 \ \forall v \notin s\}$$

Notar que si s es un n-simplex, entonces $|s|$ está en biyección con el n-simplex estándar $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ y } \sum x_i = 1\}$. Más aún, si le damos a $|s|$ la topología que definimos para $|K|_d$, entonces $|s|$ es homeomorfo a Δ_n. Entonces consideramos a todos los símplices $|s|$ con la topología métrica y le damos al conjunto $|K|$ la topología coherente con la topología dada a los $|s|$. Es decir, un subconjunto B es cerrado (abierto) en $|K|$ sii $B \cap |s|$ es cerrado (abierto) para todo $s \in K$. Notaremos directamente con $|K|$ a este espacio topológico.

Ejercicios 1.
(1) Sea K un complejo simplicial y X espacio topológico. Probar que una función $f : |K| \to X$ es continua si y sólo si las restricciones $f : |s| \to X$ son continuas.
(2) Probar que $f : |K| \to X$ es continua si y sólo si las restricciones $f : |K^n| \to X$ son continuas para todo $n \geq 0$.
(3) Probar que la función $i : |K| \to |K|_d$ que es la identidad en el conjunto subyacente, es continua. Deducir que $|K|$ es Hausdorff.
(4) Probar que $H : |K| \times I \to X$ es continua si y sólo si las restricciones $H : |s| \times I \to X$ son continuas para todo s.

Definición y Observación 8. Dado un simplex s, se define el simplex abierto $< s > \subset |K|$ como el subconjunto

$$< s > = \{\alpha \in |K|,\ \alpha(v) \neq 0 \Leftrightarrow v \in s\}$$

Notar que $< s >$ es abierto en $|s|$ pero no es necesariamente abierto en $|K|$. Notar también que todo elemento de $|K|$ pertenece a un único $< s >$.

Ejercicios 2.
(1) Sea A un subespacio de $|K|$. Probar que A contiene un subespacio discreto A' que consiste en exactamente un punto por cada simplex abierto $< s >$ que interseca a A.
(2) Probar que todo subespacio compacto de $|K|$ está contenido en una cantidad finita de símplices abiertos. Deducir que K es un complejo simplicial finito si y sólo si $|K|$ es compacto.

Definición 9. Una triangulación (K, f) de un espacio topológico X consiste de un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \to X$. Si X admite una triangulación se llama Poliedro.

Observación 10. Notar que un poliedro puede admitir dos triangulaciones diferentes (K, f) y (L, g) tales que K y L no sean complejos simpliciales isomorfos.

Ejercicios 3.
(1) Probar que los siguientes espacios son poliedros, encontrando una triangulación.
   (a) D^n
   (b) S^n
   (c) $\mathbb{R}^n$.
(2) Encontrar un poliedro que admita dos triangulaciones que no sean isomorfas como complejos simpliciales.

Definición 11. Sea M una variedad diferenciable. Una triangulación diferenciable en M es una triangulación (K, f) (es decir un homeomorfismo $f : |K| \to M$) tal que para todo simplex $\sigma \in K$ existe una carta (U, ϕ) con $f(|\sigma|) \subset U$ y tal que $\phi f : |\sigma| \to \phi(U)$ es afin.

La demostración del siguiente teorema se puede consultar en el libro de Whitney [Geometric Integration Theory]:

Teorema 12. *Toda variedad diferenciable admite una triangulación diferenciable.*

Observar que, si M es compacta, entonces M es triangulable por un complejo simplicial finito.

Definición 13. Si M es un poliedro compacto definimos la característica de Euler de M como

$$\chi(M) = \sum (-1)^i \alpha_i$$

donde α_i es la cantidad de i-símplices de M.

Veremos que esto está bien definido, es decir que no depende de la triangulación elegida. Más aún, veremos que la característica de Euler depende del tipo homotópico de M.

Definición y Observación 14. Si M es un grupo abeliano finitamente generado, por el teorema de estructura de $\mathbb{Z}$-módulos finitamente generados sabemos que existen únicos $m \in \mathbb{N}_0$ y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que

$$M = \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$$

donde n_i divide a n_{i+1} para todo i. El número m se denomina el rango de M y lo denotamos $r(M)$ y a los números $n_1, \ldots, n_k$ se los llama coeficientes de torsión de M.

Definición y Observación 15. Sea C_* un complejo de cadenas de grupos abelianos (o simplemente un grupo abeliano graduado). Decimos que C_* es finitamente generado si los grupos C_n son finitamente generados para todo n y además $C_n = 0$ salvo para finitos n. Es claro que si C_* es un complejo finitamente generado entonces su homología $H_*(C)$ es un grupo abeliano graduado finitamente generado.

Definición 16. Definimos la característica de Euler de un complejo de cadenas (o grupo abeliano graduado) C_* como

$$\chi(C_*) = \sum (-1)^n r(C_n)$$

Ejercicio Importante. Sea C_* un complejo de cadenas finitamente generado. Probar que $\chi(C_*) = \chi(H_*(C))$.

Un resultado importante de topología algebraica dice que la homología singular de un poliedro puede calcularse mediante sus símplices. Concretamente, la homología puede calcularse tomando un complejo de cadenas que en cada grado r tiene el grupo abeliano libre generado por los r-símplices del poliedro. De esta manera, la característica de Euler del complejo asociado al poliedro es justamente la característica de Euler del poliedro y, por el ejercicio importante de arriba, se deduce que este número depende solamente de la homología singular del poliedro.

De esta manera, $\chi(M)$ dependerá del tipo homotópico de M y, en particular, no depende de la triangulación elegida.

Otro ejercicio importante. Calcular la carecterística de Euler de las esferas, los discos, el toro, las esferas con g manijas, etc.