Práctica 1

1. Sea M un conjunto y $B = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de subconjuntos de M que satisface:

(i) $M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$

(ii) si $\alpha, \beta \in A$ y $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ existe $\gamma \in A$ tal que $U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$

Probar que existe una única topología $\mathcal{T}$ de M que tiene a B como base.

2. Probar que la familia $B = \{B(p,r)\}_{\substack{p\in\mathbb{R}^n \\ r>0}}$ es una base de la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Idem con $\tilde{B} = \{B(p,r)\}_{\substack{p\in\mathbb{Q}^n \\ r\in\mathbb{Q}_{>0}}}$.

3. a) Sea $(M, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subset M$, $S \neq \varnothing$. Sea

$$\mathcal{T}_{\text{ind}} = \{A \subset S \ / \ \text{ existe } U \in \mathcal{T} \text{ con } A = U \cap S\}$$

Probar que $(S, \mathcal{T}_{\text{ind}})$ es un espacio topológico.

b) Probar que si $(M, \mathcal{T})$ admite una base numerable, entonces $(S, \mathcal{T}_{\text{ind}})$ también.

c) Probar que si $(M, \mathcal{T})$ es Hausdorff, entonces $(S, \mathcal{T}_{\text{ind}})$ también.

4. Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $B = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una base de $\mathcal{T}$. Probar que para todo $x \in E$ y $U \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$, existe $\alpha \in A$ tal que $x \in U_\alpha \subset U$.

5. Sea M un espacio topológico y $A \subset M$ abierto. Probar que si $K \subset A$ es compacto en A (para la topología inducida) entonces K es compacto en M.

6. Sean $(A, \mathcal{T})$, $(E, \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos tales que $A \subset E$, $i : A \longrightarrow E$ la inclusión. Probar que:

a) $i : A \longrightarrow E$ es contínua si y sólo si $\mathcal{T}'_{\text{ind}} \subset \mathcal{T}$

b) $id : (A, \mathcal{T}) \longrightarrow (A, \mathcal{T}'_{\text{ind}})$ es homeomorfismo si y sólo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}'_{\text{ind}}$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

Probar:

a) f es contínua en $t = 0$

b) f es derivable en $t = 0$ y $f'(0) = 0$

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \dfrac{e^{-1/t}}{t^{n+k}}$ $(t > 0)$

d) $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Sean M , N espacios topológicos y $f : M \longrightarrow N$ inyectiva y contínua.

a) Probar que existe una única topología $\mathcal{T}$ sobre $f(M)$ que hace de $f : M \longrightarrow f(M)$ un homeomorfismo.

b) Verificar que $i : f(M) \longrightarrow N$ es contínua.

c) Dar un ejemplo donde la topología inducida por N sobre $f(M)$ no coincida con $\mathcal{T}$.

9. a) Sean M , N espacios topológicos y $f : M \longrightarrow N$ una función contínua. Probar que si $C \subset M$ es conexo, entonces $f(C)$ es conexo en N.

b) Encontrar una función biyectiva y contínua entre dos espacios topológicos que no sea homeomorfismo.

10. Sean M , N espacios topológicos y $f : M \longrightarrow N$ una función. Verificar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) f es contínua en p

b) Si (p_n) es una sucesión en M que converge a p, entonces $(f(p_n))$ converge a $f(p)$.

11. Si M y N son variedades topológicas de la misma dimensión y $f : M \longrightarrow N$ es contínua e inyectiva, probar que f es abierta.

12. a) Sea M una variedad topológica y A un abierto no vacío de M. Mostrar que A –con la topología inducida– es una variedad topológica de la misma dimensión que M.

b) Verificar que $\mathbb{R}^{n\times n}$ es –de manera natural– una variedad topológica de dimensión n^2. Deducir que $GL(n,\mathbb{R})$ es una variedad topológica de dimensión n^2.

13. En cada uno de los casos siguientes, decidir si el conjunto dado es una variedad topológica. En caso de serlo, mostrar un atlas.

a) $\mathbb{R}^n$

b) $M : x_1^2 - x_2^2 = 0$, $M \subset \mathbb{R}^2$

c) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \;/\; \|x\| = 1\}$

d) $M =$ espacio vectorial de dimensión n

e) $N \times P$, N , P variedades topológicas de dimensiones n y k respectivamente

f) $[a,b] \subset \mathbb{R} \quad (a < b)$

g) $N \cap P$, $N : x_1^2 + x_2^2 = 1$, $P : x_2 = 0, \quad N, P \subset \mathbb{R}^3$

h) $N \cap P$, $N : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $P : x_3^2 - x_3 = 0, \quad N, P \subset \mathbb{R}^3$

14. Sean M , N variedades topológicas. Se definen las proyecciones:

$$\pi_1 : M \times N \longrightarrow M \qquad \text{y} \qquad \pi_2 : M \times N \longrightarrow N$$

por $\pi_1(x,y) = x$ y $\pi_2(x,y) = y$. Considerando en $M \times N$ la topología producto, probar que π_1 y π_2 son contínuas y abiertas.

15. Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable y tal que $\det(D_j f^i|_p) \neq 0$ para todo $p \in G$. Probar:

a) $f(G)$ es abierto

b) Si f es inyectiva, entonces $f : G \longrightarrow f(G)$ es un difeomorfismo.

16. Sean $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$, con $a_{ij} = a_{ji}$, y sea $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función cuadrática definida por

$$F(u^1, \dots, u^n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u^i u^j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i u^i + c$$

Supongamos que $Q = F^{-1}(0)$ es no vacío; es decir, Q es una cuádrica. Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ se denomina un CENTRO de Q si para todo $x \in Q$ es $2p - x \in Q$.

Verificar que si ningún punto de Q es centro de Q, entonces todo $p \in Q$ es un punto regular de F.

17. Verificar que si $Q : F(u) = 0$ es una cuádrica en $\mathbb{R}^n$ y $p \in Q$ es regular, entonces el hiperplano tangente a Q en p es:

$$T_p = \{u \in \mathbb{R}^n \ / \ < \nabla F(p), u - p >= 0\}$$

18. Deducir, a partir de la dada en teórica, la versión tradicional del Teorema de la Función Implícita.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)