# Geometría Diferencial
## Cohomología de de Rham

Vamos a utilizar las formas diferenciales para detectar las propiedades topológicas de una variedad. Tomemos como ejemplo el toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Parametrizamos el toro a través de las dos coordenadas angulares $(\theta, \psi)$, $\theta, \psi \in [0, 2\pi)$coordenadas constituyen una carta densa en todo $T^2$.

El toro tiene dos lazos distintos no contraíbles a un punto:
$a : [0, 2\pi] \to T^2,\ a(t) = (t, 0)$
$b : [0, 2\pi] \to T^2,\ b(t) = (0, t)$

Son distintos porque no se pueden deformar el uno en el otro. Constituyen un conjunto de generadores porque cualquier otro lazo puede ser deformado en uno que da $n$ vueltas como $a$ y $m$ vueltas como $b$. Estos lazos generan el grupo fundamental de $T^2$.

Busquemos distinguir las diferencias entre ambos lazos usando formas. Tomemos $d\theta$ y $d\psi \in \Lambda^1 T^2$, los cuales satisfacen

$$\begin{aligned} \int\limits_a d\theta &= \int\limits_b d\psi = 2\pi, \\ \int\limits_b d\theta &= \int\limits_a d\psi = 0 \end{aligned}$$

Además, si $F : [0,1]\times\ [0, 2\pi] \to T^2$, $F(0, t) = a(t)$ es una deformación de $a$ al lazo $a' : t \mapsto F(1, t)$ en tonces por el teorema de Stokes

$$\int\limits_a d\theta = \int\limits_{a''} d\theta + \int\limits_{\operatorname{Im} F} d(d\theta) = \int\limits_{a''} d\theta$$

**Ejercicio.** *¿Por que está mal el siguiente argumento? “Como la imagen de un lazo es una 1-variedad sin frontera, el teorema de Stokes garantiza* $\int\limits_a d\theta = \int\limits_{\partial a = \emptyset} \theta = 0$*”.*

La propiedad que nos permitió probar que la integral es invariante por deformaciones es que $d\theta$ es cerrada. Además, si $f \in C^\infty(T^2)$ , $d\theta + df$ es también cerrada y su integral es indistinguible de la de $d\theta$, pues

$$\int\limits_a d\theta + df = \int\limits_a d\theta + \int\limits_{\partial a} f = \int\limits_a d\theta$$

Entonces, como las formas exactas son cerradas, i.e., si $\omega = d\lambda$ entonces $d\omega = 0$, se puede cocientar un espacio vectorial por el otro y definimos

$$H^1_{dR}(T^2) = \{\omega \in \Lambda^1 T^2 : d\omega = 0\} \,/\, \{df : f \in C^\infty(T^2)\}$$

Se le suele llamar primer grupo de cohomología de de Rham aunque es un espacio vectorial y un grupo en un sentido trivial. Las razones vienen dadas por el teorema de de Rham que hace que dicha estructura sea isomorfa a otra que sí es construida como un grupo. Lo veremos más adelante.

**Afirmación:** $\dim H^1_{dR}(T^2) = 2$

$d\theta$ y $d\psi$ aunque son formas asociadas a la carta y por tanto solo definidas localmante pueden ser bién definidas en todo $T^2$, lo cual no se puede hacer con $\theta, \psi$ como 0-formas.

Demostración: Sea $\omega = \alpha d\theta + \beta d\psi$ una 1-forma cerrada, por tanto $\frac{\partial\alpha}{\partial\psi} = \frac{\partial\beta}{\partial\theta}$. En $\mathbf{R}^2$ esta es la condición necesaria y suficiente para que $\omega$ sea exacto, $df = \omega$, i.e., para que exista $f$ tal que $\frac{\partial f}{\partial\theta} = \alpha, \frac{\partial f}{\partial\psi} = \beta$. Si $f$ satisfaciendo lo anterior existiese en todo $T^2$ tendriamos que $H^1_{dR}(T^2) = \{0\}$ . Luego la exactitud de $\omega$ ocurriría si $f$ es doblemente periódica, o sea si satisface $f(\theta + 2\pi n, \psi + 2\pi m) = f(\theta, \psi)\ \forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que $\alpha, \beta$ son constantes , entonces $f = \alpha\theta + \beta\psi + C$ . Esta función no satisface la condición de doble periodicidad que la convertiría en una función bién definida en $T^2$ . Luego, todas estas $\omega$ son formas cerradas no exactas . Así $d\theta, d\psi$ son formas cerradas no exactas l.i. y por tanto $H^1_{dR}(T^2)$ tiene dimensión al menos 2.

Supongamos que $\alpha, \beta$ no son constantes , entonces para que $\omega$ esté bién definida en $T^2$ debe ocurrir que

$$\begin{aligned}
\alpha(\theta,\psi) &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_{n,m}\exp(in\theta)\exp(im\psi)\\
\beta(\theta,\psi) &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} b_{n,m}\exp(in\theta)\exp(im\psi)\\
a_{0,0} &= b_{0,0} = 0
\end{aligned}$$

Ocurre entonces que $\int\limits_a \alpha = \int\limits_b \alpha = \int\limits_a \beta = \int\limits_b \beta = 0$

La concdición local de exactitud nos lleva a que

$$f(\theta_0,\psi_0) = f(0,0) + \int\limits_{(0,0)}^{(\theta_0,0)} \alpha(\theta,0)d\theta + \int\limits_{(\theta_0,0)}^{(\theta_0,\psi_0)} \beta(\theta_0,\psi)d\psi$$

y obtenemos

$$f(\theta_0 + 2\pi n, \psi_0 + 2\pi m) - f(\theta_0,\psi_0) =$$

$$\int\limits_{(\theta_0,0)}^{(\theta_0+2\pi n,0)} \alpha(\theta,0)d\theta - \int\limits_{(\theta_0,0)}^{(\theta_0,\psi_0)} \beta(\theta_0,\psi)d\psi + \int\limits_{(\theta_0+2\pi n,0)}^{(\theta_0+2\pi n,\psi_0+2\pi m)} \beta(\theta_0+2\pi n,\psi)d\psi =$$

$$= m\int\limits_{(\theta_0,\psi_0)}^{(\theta_0,\psi_0+2\pi)} \beta(\theta_0,\psi)d\psi + n\int\limits_{(\theta_0,0)}^{(\theta_0+2\pi,0)} \alpha(\theta,0)d\theta = 0$$

Luego, $f$ es periódica y por lo tanto $df = \omega$ sobre $T^2$. l.q.q.d.

**Ejercicio.** *Utilice el argumento anterior para calcular $H^1_{dR}(S^1)$.*

$H^1_{dR}(M)$ mide cuánto se aleja topológicamente $M$ de ser simplemente conexa. El grupo fundamental también pero no son la misma cosa. Se demuestra que $H^1_{dR}(M) \cong (\pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)])\otimes$

$\mathbb{R}$. Luego en la cohomología de de Rham se pierde información que se tiene en el grupo fundamental (tiene torsión y es no conmutativo), pero es más fácil de calcular.

**Definición.**

$$H^k_{dR}(M) = \left\{\omega \in \Lambda^k M : d\omega = 0\right\} / \left\{d\theta : \theta \in \Lambda^{k-1} M\right\}$$

La dimensión de este espacio se conoce como el k-ésimo número de Betti. En general puede ser infinito aunque se demuestra que es finito en el caso de variedades compactas.

$H^0_{dR}(M) = \left\{f \in \Lambda^0 : df = 0\right\}$ mide el número de componentes conexas de $M$.

Sea $f : M \to N$ una aplicación suave de variedades, entonces $f^* : \Lambda^k N \to \Lambda^k M$ , y debido a que $f^* d\omega = df^*\omega$, manda formas cerradas en cerradas y exactas en exactas, induciendo un morfismo en cohomologías. En el caso de que $f$ sea un difeomorfismo tendremos que los espacios de cohomología son isomorfos. Esto último ocurre ante condiciones de equivalencia más débiles entre variedades, por ejemplo si son homotópicamente equivalentes:

**Definición.** Dos variedades $M, N$ son suavemente homotópicamente equivalentes si :

Existen $f : M \to N$ , $g : N \to M$ , $F : [0,1] \times M \to M$, $G : [0,1] \times N \to N$ suaves tales que

$$F(0,x) = g \circ f,\ F(1,\cdot) = Id_M,\ G(0,y) = f \circ g,\ G(1,\cdot) = Id_N$$

Sea $i_t : M \to [0,1] \times M$ dada por $i_t(x) = (t,x)$ . Definimos $I : \Lambda^k([0,1] \times M) \to \Lambda^{k-1} M$ de la siguiente manera: si $\omega \in \Lambda^k([0,1] \times M)$ tiene la expresión local

$$\begin{aligned} \omega &= f_{i_1,\dots,i_k}(t,x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + g_{j_1,\dots,j_{k-1}}(t,x) dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} \\ &= \omega_1 + dt \wedge \eta \end{aligned}$$

entonces

$$I\omega_p = \int_0^1 i_t^* \eta(t,p) dt \in \Lambda^{k-1} T_p^* M$$

Sean $d_M$ ,$d_{[0,1]\times M}$ las derivadas exteriores en $M, [0,1] \times M$ respectivamente.

**Lema.** $i_1^* - i_0^* = d_M \circ I + I \circ d_{[0,1]\times M}$

*Dem.* Hacerla como ejercicio. □

**Ejercicio.** *Supongamos que $f_0, f_1 : M \to N$ son aplicaciones suavemente homotópicas con $F : [0,1] \times M \to N$, $F(1,x) = f_1$, $F(0,x) = f_0$ . Demuestre que $f_1^* - f_0^* = dIF^* - IF^*d$. Sugerencia: use el lema anterior. Demuestre que $f_0^*, f_1^*$ inducen la misma aplicacion en cohomología.*

**Ejercicio.** *Demuestre que si $M, N$ son suavemente homotópicamente equivalentes entonces son cohomológicamente isomorfas.*

**Ejercicio.** *Demuestre que $\mathbb{R}^n$ es equivalente homotópicamente a un punto. Demuestre que*

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & si\ k = 0 \\ 0 & si\ k \neq 0 \end{cases}$$

El vínculo entre la cohomología de de Rham y la cohomología singular se establece a través de la aplicación

$$\begin{aligned} dR \quad &: \quad H^k_{dR}(M) \to H^k_{\sin g}(M, \mathbb{R}) \\ \omega \quad &\longmapsto \quad \left( \sigma \mapsto \int\limits_\sigma \omega \right) \end{aligned}$$

**Ejercicio.** *Demustre que la aplicación de de Rham está bién definida, i.e.:*
*a) $dR$ es independiente del representante de $[\omega]$.*
*b) la imagen de $dR$ está en el espacio de cociclos.*

**Ejercicio.** *Demuestre que $H^n(M^n) \neq 0$ si $M$ es orientada y compacta.*

**Ejercicio.** *(a) Calcule los grupos de cohomología para $S^n$ (use Mayer-Vietoris).*
*(b) Demuestre que $\beta^k(T^n) = \binom{n}{k}$.*
*(c) Demuestre que para una supeficie $\Sigma$ cerrada, orientada con $g$ huecos,$\beta^0(\Sigma) = 1, \beta^1(\Sigma) = 2g, \beta^2(\Sigma) = 1$.*