Geometría Diferencial

Fibrados

Definición. Un *fibrado* (*fibre bundle*) suave (E, π, M, F, G) consiste de los siguientes elementos:

(I) Una variedad diferenciable E llamada *espacio total*.

(II) Una variedad diferenciable M llamade *base*.

(III) Una variedad diferenciable F llamada *fibra*.

(IV) Una aplicación diferenciable y sobreyectiva $\pi : E \to M$ llamada *proyección*. La imagen inversa $\pi^{-1}(p)$ $(p \in M)$ es llamada la *fibra* en p, y notada con E_p.

(V) Un grupo de Lie G llamado el *grupo estructural*, el cual actúa sobre F por la izquierda.

(VI) Un cubrimiento por abiertos de M, $\{U_i\}$, con difeomorfismos $\Phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ tales que $\pi(\Phi_i(p, v)) = p$, es decir, tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U_i \times F \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \pi^{-1}(U_i) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

La aplicación Φ_i es llamada *trivialización local* pues Φ_i^{-1} mapea $\pi^{-1}(U_i)$ sobre el producto directo $U_i \times F$.

Escribimos $\Phi_{i,p}(v) = \Phi_i(p, v)$ $(p \in U_i)$.

(VII) Si $p \in U_i \cap U_j$ entonces $\Phi_{i,p}^{-1} \circ \Phi_{j,p} \in G$. Entonces Φ_i, Φ_j están vinculadas por una aplicación suave $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ tal que $\Phi_j(p, v) = \Phi_i(p, t_{ij}(p)v)$. Las t_{ij} son conocidas como las *funciones de transición*.

Generalmente se utiliza la notación abreviada $E \xrightarrow{\pi} M$ para denotar a (E, π, M, F, G).

Notemos que $\Phi_{i,p}$ nos da un homeomorfismo entre $\{p\} \times F$ y E_p, que permite darle a este último conjunto una estructura de variedad.

Observación. Las funciones de transición satisfacen:

(1) $t_{ii}(p) = id$ $(p \in U_i)$.

(2) $t_{ij}(p) = t_{ji}^{-1}(p)$ $(p \in U_i \cap U_j)$.

(3) $t_{ij}(p) \circ t_{jk}(p) = t_{ik}(p)$ $(p \in U_i \cap U_j \cap U_k)$.

¿Por qué?.

Ejemplo 1. El fibrado tangente de una variedad diferenciable M es un ejemplo de fibrado. $E = TM$, $F = \mathbb{R}^n$, $G = GL(n, \mathbb{R})$, los inversos de las cartas trivializadoras constituyen las aplicaciones Φ_i, trivializaciones locales, y las t_{ij} vienen dadas por las aplicaciones de cambio de base que expresan las componentes de un elemento del espacio tangente en un punto respecto a una base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ asociada a la carta x en función de las componentes del mismo elemento expresado en la base $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ asociada a otra carta y .

Ejemplo 2. Sea $M = S^1$, la circunferencia unidad. $U_1 = S^1 - \{(1, 0)\}$, $U_2 = S^1 - \{(-1, 0)\}$. Tomaremos como cartas locales sobre U_1 y U_2 aquellas que a cada punto le ponen en correspondondencia el ángulo θ como un valor de $(0, 2\pi)$ en el caso de U_1 y de $(-\pi, \pi)$ en el de U_2. Consideremos $F = \mathbb{R}$ y $E = M \times F$, con $\pi : E \to M$ definida por $\pi(p, v) = p$, y con el cubrimiento $\{\pi^{-1}(U_i)\}_{i=1,2}$ de E. Hacemos $\Phi_i^{-1}(p,v) = (p,v)$. En este caso el espacio que se obtiene es el cilindro infinito.

Lo otro que podemos hacer es: $\Phi_1^{-1}(p,v) = (p,v)$ y, como $U_2 = (U_2 \cap A) \cup (U_2 \cap B)$, donde $A = \{(x,y) \in S^1 : y \geq 0\}$, $B = \{(x,y) \in S^1 : y < 0\}$, hacemos $\Phi_2^{-1}(p,v) = (p,v)$ cuando $p \in A$ y $\Phi_2^{-1}(p,v) = (p,-v)$ cuando $p \in B$. En $U_1 \cap U_2 \cap A$, $t_{12}(p)(v) = v$, mientras que en $U_1 \cap U_2 \cap B$, $t_{12}(p)(v) = -v$. El resultado es una banda de Möbius.

El cilindro y la banda han sido armados a partir del mismo espacio S^1 y la misma fibra, sin embargo no son difeomorfos. La aplicación identidad de $S^1 \times \mathbb{R}$ en $S^1 \times \mathbb{R}$ con las cartas del cilindro y de la banda en uno y otro espacio respectivamente no es difeomorfismo. ¿Por qué?.

Definición. Dados $E \xrightarrow{\pi} M$ y $E' \xrightarrow{\pi'} M'$, decimos que hay un morfismo de un fibrado en el otro si tenemos sendos morfismos $f : M \to M'$ y $\widetilde{f} : E \to E'$, tales que $f \circ \pi = \pi' \circ \widetilde{f}$. Es decir, tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

Si f y $\widetilde{f}$ son isomorfismos se dice que los fibrados son *isomorfos*.

Ejercicio 1. Un fibrado se puede reconstruir a partir de conocer M, $\{U_i\}$, t_{ij}, F y G. Esto se logra creando $X = \coprod_i (U_i \times F)$ y estableciendo una relación de equivalencia, $\sim$, entre $(p,f) \in U_i \times F$ y $(p',f') \in U_j \times F$ si y sólo si $p = p'$ y $f' = t_{ij}(p)(f)$. Definimos $E = X/\sim$. Un elemento de E lo denotaremos $[(p,f)]$ y $\pi([(p,f)]) = p$. Complete la estructura de fibrado y demuestre que satisface los axiomas que lo definen como tal. Pruebe que el fibrado obtenido es isomorfo a aquel con el que se empieza. Compare esta construcción con la que se hizo anteriormente para el cilindro y la banda de Möbius.

Ejercicio 2. Considere el espacio que se obtiene de $[0,1] \times \mathbb{R}^n$ al identificar $(0,v)$ con $(1,Tv)$ donde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Demuestre que dicho espacio se puede convertir en el espacio total de un fibrado sobre S^1 (banda de Möbius generalizada). Verifique que dicho fibrado es una variedad orientable si y sólo si T preserva la orientación. En el caso $n = 1$, ¿ocurrirá que todos los fibrados construidos serán isomorfos al cilindro infinito o a la banda de Möbius?.

Definición. Un fibrado se dice *trivial* si se puede encontrar un conjunto de trivializaciones locales tales que $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ sea la aplicación identidad para todos i,j.

Ejemplo 3. El cilindro es un fibrado trivial pero no la banda de Möbius.

Ejercicio 3. Verifique que esa definición de fibrado trivial es equivalente a pedir que el fibrado sea isomorfo a $M \times F$.

Definición. Una *sección local* en un abierto $U \subset M$ es una función diferenciable $f : U \to \pi^{-1}(U)$ tal que $\pi \circ f = id$. Una *sección global* es una sección definida en todo M.

Definición. Un fibrado (E,π,M,F,G) es un *fibrado vectorial* cuando F y $\pi^{-1}(p)$ son espacios vectoriales, las trivializaciones respetan dicha estructura y G es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$. Observar que entonces las $\Phi_{i,p}$ definen isomorfismos entre E_p y F. Un morfismo de fibrados vectoriales es un morfismo de fibrados que es lineal en cada fibra.

Ejercicio 4. Demuestre que un fibrado vectorial es trivial si y sólo si existen n (la fibra la suponemos un espacio vectorial de dimensión n) secciones globales linealmente independientes (i.e., que en cada punto son linealmente independientes). Demuestre que localmente todo fibrado vectorial tiene n secciones linealmente independientes.

Ejercicio 5. Supongamos que tenemos una aplicación $(a,b) \mapsto a \cdot b$ desde $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ tal que:

(I) $(a_1 + a_2) \cdot b = a_1 \cdot b + a_2 \cdot b$.
(II) $b \cdot (a_1 + a_2) = b \cdot a_1 + b \cdot a_2$.
(III) $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
(IV) $a \cdot (1,0,..,0) = a$.
(V) $\forall a \neq 0, \exists b/$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = (1,0,...,0)$.

(una álgebra de división sobre $\mathbb{R}$).

Sea $e_1, e_2, ..., e_n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que:

(a) Todo punto de S^{n-1} es de la forma $a \cdot e_1$ para un único $a \in \mathbb{R}^n$.
(b) Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot e_1, a \cdot e_2, ..., a \cdot e_n$ son linealmente independientes.
(c) Si $p = a \cdot e_1 \in S^{n-1}$ entonces las proyecciones de $a \cdot e_1, a \cdot e_2, ..., a \cdot e_n$ en S^{n-1}_p son linealmente independientes.
(d) La multiplicación es continua.
(e) TS^{n-1} es trivial.
(f) $T\mathbb{R}^{n-1}$ es trivial.

Lo anterior nos lleva a que $TS^3, T\mathbb{R}^3, TS^7, T\mathbb{R}^7$ sean triviales debido a la existencia de los cuaterniones y los octetos de Cayley.

Ejercicio 6. Suponga que $\xi = (\pi : E \to X)$ es un fibrado y $f : Y \to X$ es una aplicación continua:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

(a) Sea $E' \subset Y \times E$ el conjunto de todos los (y,e) tales que $f(y) = \pi(e)$. Defina $\pi' : E' \to Y$ por $\pi'(y,e) = y$ y $\widetilde{f} : E' \to E$ por $\widetilde{f}(y,e) = e$. Si π es un fibrado vectorial, se puede definir también una estructura de espacio vectorial sobre $\pi^{-1}(y) = \{(y,e) : e \in \pi^{-1}(f(y))\}$ usando la estructura de espacio vectorial sobre $\pi^{-1}(f(y))$. Demuestre que $\xi' = (\pi' : E' \to Y)$ es un fibrado y que $(f, \widetilde{f})$ es un morfismo de fibrados que es un isomorfismo en cada fibra. Este fibrado se denota como $f^*(\xi)$ y es conocido como *pull-back* (o *producto fibrado*) de ξ.

$$\begin{tikzcd} f^*(\xi) \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi'"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

(b) Suponga que se tiene otro fibrado $\xi'' = (\pi'' : E'' \to Y)$ y un morfismo de fibrados de ξ'' a ξ, el cual es un isomorfismo en cada fibra. Demuestre que $\xi'' \simeq f^*(\xi)$.
(c) Si $g : Z \to Y$ entonces $(f \circ g)^*(\xi) = g^*(f^*(\xi))$.
(d) Si $A \subset X$ y $i : A \to X$ es la inclusión entonces $i^*(\xi) \simeq \xi\,|_A$.

(e) Si ξ es orientable entonces $f^*(\xi)$ también lo es.
(f) Dé un ejemplo donde ξ no sea orientable pero sí lo sea $f^*(\xi)$.

Ejercicio 7. (a) Dado un fibrado n-dimensional $\xi = (\pi : E \to B)$ y un fibrado m-dimensional $\eta = (\pi' : E' \to B)$, sea $E'' \subset E \times E'$ el conjunto de todos los pares (e, e') con $\pi(e) = \pi'(e')$. Demuestre que $\pi'' : E'' \to B$, $(e, e') \mapsto \pi(e) = \pi'(e')$, es un fibrado $(n+m)$-dimensional. Se le conoce como *suma de Whitney* $\xi \oplus \eta$; la fibra sobre p es la suma directa $\pi^{-1}(p) \oplus \pi'^{-1}(p)$.
(b) Si $f : Y \to B$, demuestre que $f^*(\xi \oplus \eta) \simeq f^*(\xi) \oplus f^*(\eta)$.
(c) Dados los fibrados $\xi_i = (\pi_i : E_i \to B_i)$ $(i = 1, 2)$, defina $\pi : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ como $\pi(e_1, e_2) = (\pi_1(e_1), \pi_2(e_2))$. Demuestre que esto es un fibrado $\xi_1 \times \xi_2$ sobre $B_1 \times B_2$.
(d) Si $\Delta : B \to B \times B$ es la aplicación diagonal, $\Delta(x) = (x, x)$, demuestre que $\xi \oplus \eta \simeq \Delta^*(\xi \times \eta)$.
(e) Si ξ y η son orientables, demuestre que $\xi \oplus \eta$ también lo es.
(f) Demuestre que $\xi \oplus \xi$ es siempre orientable.
(g) Si X es la figura ocho, encuentre dos estructuras de fibrado unidimensional sobre X, ξ y η, tales que $\xi \oplus \eta$ sea no orientable.

Ejercicio 8. (a) Si $\pi : E \to B$ es un fibrado vectorial entonces π_* tiene rango maximal en todo punto y cada fibra $\pi^{-1}(p)$ es una subvariedad de E.
(b) La sección 0 de E es una subvariedad, aplicada difeomórficamente sobre B por π.

Ejercicio 9. Una sucesión de aplicaciones de fibrados vectoriales $E_1 \xrightarrow{\tilde{f}} E_2 \xrightarrow{\tilde{g}} E_3$ con $f = g = Id_B$ es *exacta* si lo es en cada fibra como aplicaciones de espacios vectoriales.
(a) Si $\xi = (\pi : E \to B)$ es un fibrado vectorial, demuestre que existe una sucesión exacta $0 \to \pi^*(\xi) \to TE \to \pi^*(TB) \to 0$.
(b) Si $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ es exacta entonces cada fibrado es orientable si los otros dos lo son.
(c) $T(TM)$ es siempre orientable.
(d) Si $\pi : E \to B$ no es orientable entonces E no es orientable. Por lo tanto, el hecho de que el fibrado de Möbius no sea orientable implica que la variedad de Möbius tampoco lo es.