Geometría Diferencial

Práctica 1

Superficies en $\mathbb{R}^3$

En lo que sigue, $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular (= subvariedad sumergida de $\mathbb{R}^3$). Si $p \in M$, notamos con $T_pM \subset \mathbb{R}^3$ al espacio tangente a M en p.

Notamos con:

$\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : f \in C^\infty\}$

al conjunto de las funciones diferenciables sobre M, y respectivamente con

$C^\infty(M) = \{X : M \to \mathbb{R}^3 : X \in C^\infty\}$

$\mathfrak{X}(M) = \{X \in C^\infty(M) \text{ y } X(p) \in T_pM \text{ si } p \in M\}$

$\mathfrak{X}^\perp(M) = \{X \in C^\infty(M) \text{ y } X(p) \in (T_pM)^\perp \text{ si } p \in M\}$

al conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre M, tangenciales y perpendiculares.

(1) Si $f, g \in \mathcal{F}(M)$ y $X, Y \in C^\infty(M)$, probar que $f.X + g.Y \in C^\infty(M)$. Ídem para $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathfrak{X}^\perp(M)$.

(2) Si $X \in C^\infty(M)$, existen únicos $X^T \in \mathfrak{X}(M)$ y $X^\perp \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ tales que $X = X^T + X^\perp$; es decir, $C^\infty(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}^\perp(M)$.

(3) Sea (U, x), $x = (x_1, x_2)$ una carta de M, $f = x^{-1} : x(U) \to M$ la parametrización correspondiente. Se definen:

$\partial x_1, \partial x_2 : U \to \mathbb{R}^3$

$\partial x_i|_p = df_a(e_i)$ si $x(p) = a$

donde $\{e_1, e_2\}$ representa a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Probar que $\partial x_i \in \mathfrak{X}(U)$ y si $X \in \mathfrak{X}(M)$, existen únicos $a_1, a_2 \in \mathcal{F}(U)$ tales que $X = a_1.\partial x_1 + a_2.\partial x_2$ (igualdad sobre U).

(4) Sea $Z \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $p \in M$, sea $dZ_p : T_pM \to \mathbb{R}^3$ la diferencial de Z evaluada en p. Es decir, si $v \in T_pM$ y $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una curva diferenciable que satisface $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = \frac{dc}{dt}|_0 = v$ entonces $dZ_p(v) = \frac{d(Y \circ c)}{dt}|_0$.

Probar que si se define $dZ(X) : M \to \mathbb{R}^3$ por

$dZ(X)(p) = dZ_p(X(p))$

entonces $dZ(X) \in C^\infty(M)$.

(5) Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$, se define $X(f) : M \to \mathbb{R}$ por $X(f)(p) = df_p(X(p))$. Probar que $X(f) \in \mathcal{F}(M)$.

(6) Sea $Z \in C^\infty(M)$, $Z = (z^1, z^2, z^3)$, donde $z^i \in \mathcal{F}(M)$. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, verificar que $dZ(X) = (X(z^1), X(z^2), X(z^3))$.

Se definen los siguientes operadores:

- $\overline{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

  $(X, Y) \quad \mapsto \quad \overline{\nabla}_X Y = dY(X)$

- $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$
  $(X,Y) \quad \mapsto \quad \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$
- $<,>: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to \mathcal{F}(M)$
  $(X,Y) \quad \mapsto \quad < X, Y >= \sum_{i=1}^{3} x^i y^i$
- $[,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$
  $(X,Y) \quad \mapsto \quad [X,Y] = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X$

(7) Sean $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y, Y_1, Y_2, Z \in C^\infty(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$. Probar que el operador $\overline{\nabla}$ verifica:

(a) $\overline{\nabla}_X(Y_1 + Y_2) = \overline{\nabla}_X Y_1 + \overline{\nabla}_X Y_2$
(b) $\overline{\nabla}_X(f.Y) = X(f).Y + f.\overline{\nabla}_X Y$
(c) $\overline{\nabla}_{X_1+X_2} = \overline{\nabla}_{X_1} Y + \overline{\nabla}_{X_2} Y$
(d) $\overline{\nabla}_{f.X} Y = f.\overline{\nabla}_X Y$
(e) $X < Y, Z >=< \overline{\nabla}_X Y, Z > + < Y, \overline{\nabla}_X Z >$

(8) Deducir del ejercicio (7) que ∇ satisface las mismas propiedades que $\overline{\nabla}$. El operador ∇ se denomina la **conexión usual** de M, y el campo $\nabla_X Y$ la **derivada covariante** de Y respecto de X.

(9) Probar que $[,]$ verifica:

(a) Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $[X,Y] = -[Y,X]$
(b) Si $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $[X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$
(c) Si $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $[X, Y_1 + Y_2] = [X, Y_1] + [X, Y_2]$
(d) Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$ entonces
  (I) $[f.X, Y] = f.[X,Y] - Y(f).X$
  (II) $[X, f.Y] = f.[X,Y] + X(f).Y$
(e) Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $U \subset M$ es un abierto entonces
  $[X,Y]|_U = [X|_U, Y|_U]$
  donde $[X,Y]|_U$ es la restricción del campo $[X,Y]$ a U y el operador $[,]$ correspondiente al miembro derecho está definido en $\mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U)$.
(f) Sea (U,x) una carta de M, $X_i = \partial x_i \in \mathfrak{X}(U)$ si $x = (x_1, x_2 =)$. Probar que $[X_i, X_j] = 0$ para $i, j = 1, 2$.
(g) Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, (U,x) una carta de M y sean
  $X|_U = a_1.X_1 + a_2.X_2$
  $Y|_U = b_1.X_1 + b_2.X_2$
  Probar que $[X,Y]|_U = c_1.X_1 + c_2.X_2$, donde

$$c_i(p) = \sum_{i=1}^{2} a_j(p) \frac{\partial(b_i \circ x^{-1})}{\partial u_j}|_{x(p)} - b_j(p) \frac{\partial(a_i \circ x^{-1})}{\partial u_j}|_{x(p)}$$

  si $p \in U$.
(h) Deducir que si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ y por lo tanto
  $[,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$.
  El campo $[X,Y]$ se denomina el **corchete de Lie** entre X e Y.
(i) Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$ entonces $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

(10) Deducir de (9), parte (h), que si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

(11) Deducir de (9), parte (i), y de (6), que si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z$.

(12) Sea $p \in M$, $v \in T_pM$ y $u \in (T_pM)^{\perp}$ con $|u| = 1$.
(a) Mostrar que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$.
(b) Probar que existe un abierto U de M con $p \in U$ y $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ tal que $N(p) = u$ y $|N(q)| = 1$ si $q \in U$.

(13) Se define $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^{\perp}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$S(X, N) = S_N(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^T$$

(a) Sean $p \in M$ y $X, \overline{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X(p) = \overline{X}(p)$. Mostrar que $S(X, N)|_p = S(\overline{X}, N)|_p$.
(b) Sean $p \in M$ y $N, \overline{N} \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ tales que $N(p) = \overline{N}(p)$. Probar que $S(X, N)|_p = S(X, \overline{N})|_p$.

Definición. El operador S se denomina el **segundo tensor fundamental** de M. El nombre *tensor* se debe a las propiedades (a) y (b). El **primer tensor fundamental** de N es el operador

$$<,>: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \; < X, Y >= \sum_{i=1}^{3} x^i y^i$$

(14) De acuerdo con el ejercicio (13), si $p \in M$ y $u \in (T_pM)^{\perp}$, queda construido un endomorfismo $S_u : T_pM \to T_pM$, definiendo

$$S_u(v) = S_N(X)|_p$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ satisfacen que $X(p) = v$ y $N(p) = u$.

Probar que el operador S_u es autoadjunto, es decir, $< S_u(v), w >=< v, S_u(w) >$ para todos $v, w \in T_pM$.

(*Sugerencia*: Considerar $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ tales que $X(p) = v$, $Y(p) = w$ y $N(p) = u$. Utilizar el ejercicio (7), parte (e) y el (9), parte (h), teniendo en cuenta que $0 = X < Y, W >$ y $0 = Y < X, N >$).

(15) Si $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$, se define $\ell_N : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ por

$$\ell_N(X, Y) =< S_N(X), Y >$$

Deducir del ejercicio (14) que ℓ_N es simétrico (es decir, $\ell_N(X, Y) = \ell_N(Y, X)$), y que para cada $p \in M$ y $u \in (T_pM)^{\perp}$ queda definida una forma bilineal simétrica $\ell_u : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ por

$$\ell_u(v, w) = \ell_N(X, Y)|_p$$

si $N(p) = u$, $X(p) = v$ e $Y(p) = w$.

Definición. ℓ_N se denomina la **segunda forma fundamental** de M respecto de N.

(16) Sea $K : M \to \mathbb{R}$ la curvatura de Gauss de M. Es decir, si $p \in M$ y (U, x) es una carta de M con $p \in U$ y $x = (x_1, x_2)$, sea $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(U)$ definido por

$$N = \frac{\partial x_1 \times \partial x_2}{|\partial x_1 \times \partial x_2|}$$

Se define entonces $K(p) = det(dN_p)$.

(a) Sea $p \in M$, $u \in (T_pM)^{\perp}$ con $|u| = 1$ y $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ tal que $N(p) = u$ y $|N(q)| = 1$ si $q \in U$ (entorno abierto de p). Verificar que $S_u = -dN_p$ y por lo tanto $K(p) = det(S_u)$.

(b) Deducir de (a) que si $\{v, w\}$ es una base de T_pM entonces

$$K(p) = \frac{\ell_u(v,v)\ell_u(w,w) - \ell_u^2(v,w)}{< v,v >< w,w > - < v,w >^2}$$

(17) Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ tal que $|N(q)| = 1$ si $q \in U$ para un cierto abierto $U \subset M$ con $p \in U$. Probar:

(a) *Ecuación de Gauss:* $\overline{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + \ell_N(Y, Z)N$ (igualdad sobre U).

(b) $(\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z))^T = \nabla_X \nabla_Y Z - \ell_N(Y, Z)S_N(X)$ (igualdad sobre U).

(c) Teniendo en cuenta que por definición de ∇ es:

$$(\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z)^T = \nabla_{[X,Y]}Z$$

pues $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, deducir de (b) y del ejercicio (11) que vale la siguiente igualdad sobre U:

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = \ell_N(Y, Z)S_N(X) - \ell_N(X, Z)S_N(Y)$$

(18) Se define el operador $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

Sean $p \in M$ y $u \in (T_pM)^{\perp}$ con $|u| = 1$. Deducir del ejercicio (17), parte (c), que si $v, w, z \in T_pM$ y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ satisfacen que $X(p) = v$, $Y(p) = w$ y $Z(p) = z$ entonces

$$R(X,Y)Z|_p = \ell_u(w,z)S_u(v) - \ell_u(v,z)S_u(w)$$

Es decir, R es un tensor pues $R(X,Y)Z|_p = R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z}|_p$ si $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ satisfacen que $\overline{X}(p) = X(p)$, $\overline{Y}(p) = Y(p)$ y $\overline{Z}(p) = Z(p)$.

Observación. De acuerdo con lo anterior, el tensor R induce para cada $p \in M$ una aplicación trilineal $R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$, definiendo $R_p(v,w)z = R_p(v,w,z) = R(X,Y)Z|_p$, siendo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X(p) = v$, $Y(p) = w$ y $Z(p) = z$.

(19) Deducir del ejercicio (16), parte (b), que si $p \in M$ y $\{v, w\}$ es una base de T_pM entonces

$$K(p) = \frac{< R_p(v,w)w, v >}{< v,v >< w,w > - < v,w >^2}$$

Definición. R se denomina el **tensor de curvatura** de M.

(20) Sea (U, x) una carta de M, $x = (x_1, x_2)$, $X_i = \partial x_i$. Definimos $g_{ij} \in \mathcal{F}(U)$ por $g_{ij} =< X_i, X_j >$. Sean $g^{ij} \in \mathcal{F}(U)$ definidas para cada $q \in U$ por

$$(g^{ij}(q)) = (g_{ij}(q))^{-1} \quad \text{(notación matricial)}$$

Sean $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(U)$ definidas por

$$\nabla_{X_i}X_j = \sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k X_k$$

Probar, para $p \in U$, que

$$\Gamma_{ij}^k(p) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{lk}(p)\Big(\frac{\partial(g_{il}\circ x^{-1})}{\partial u_j}|_{x(p)} + \frac{\partial(g_{jl}\circ x^{-1})}{\partial u_i}|_{x(p)} - \frac{\partial(g_{ij}\circ x^{-1})}{\partial u_l}|_{x(p)}\Big)$$

(21) Concluir de (19) y (20) el *Theorema Egregium* de Gauss.