GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Práctica 2

VARIEDADES DIFERENCIABLES - GENERALIDADES

(1) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base. Sea $x : V \to \mathbb{R}^n$ definida por $x(\sum_{i=1}^n a^i v_i) = (a^1, ..., a^n)$; i.e., si $x = (x^1, ..., x^n)$ entonces $\{x^1, ..., x^n\}$ es la base dual de B. Consideremos sobre V la única topología que hace de x un homeomorfismo.
  (a) Verificar que dicha topología no depende de B.
  (b) Sea $\mathcal{D}$ la estructura diferenciable generada por el atlas $\{(V, x)\}$. Probar que $\mathcal{D}$ no depende de B.

Definición. $\mathcal{D}$ se denomina *estructura diferenciable usual* para V.

(2) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $A \subset M$ un abierto no vacío.
  (a) Considerando en A la topología inducida por M, mostrar que A hereda, de manera natural, una estructura diferenciable que hace de A una variedad diferenciable de dimensión n.
  (b) Deducir que $GL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ resulta naturalmente una variedad diferenciable de dimensión n^2.

(3) Sea $X = \mathbb{R}^n \cup \{0'\}$, donde $0' \notin \mathbb{R}^n$. Se consideran dos cartas sobre X; una es (R^n, id). La otra es (U, φ), donde $U = X - \{0\}$, $\varphi(x) = x$ si $x \neq 0$ y $\varphi(0') = 0$. Probar que con esta estructura, todo punto de X tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, que el cambio de coordenadas de este atlas es diferenciable, pero X no es Hausdorff.

(4) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathcal{D}$ su estructura diferenciable.
  (a) Sean $V \subset M$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos e $y : V \to A$ un homeomorfismo, tales que para cada $p \in V$ existe una carta $(U, x) \in \mathcal{D}$ alrededor de p tal que $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$ es un difeomorfismo. Probar que $(V, y) \in \mathcal{D}$.
  (b) Sean $(U, x) \in \mathcal{D}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto e $y : U \to A$ una biyección tal que las funciones

$$y \circ x^{-1} : x(U) \to A \quad \text{y} \quad x \circ y^{-1} : A \to x(U)$$

  son diferenciables. Deducir de (a) que $(U, y) \in \mathcal{D}$.
  (c) Sea $p \in M$.
    (I) Probar que existe $(U, x) \in \mathcal{D}$ con $p \in U$ y $x(p) = 0$.
    (II) Construir $(U, x) \in \mathcal{D}$ con $p \in U$ tal que $x(p) = 0$ y $x(U) = B(0, r) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| < r\}$.
    (III) Construir $(U, x) \in \mathcal{D}$ con $p \in U$ tal que $x(p) = 0$ y $x(U) = \mathbb{R}^n$. (*Sugerencia*: considerar la función $f : B(0, 1) \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(u) = \frac{u}{1-\|u\|^2}$).

(5) Sea M una subvariedad de dimesión m de $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ un abierto no vació y $f = (f^1, ..., f^n) : A \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, que satisface las siguientes propiedades:
1. Existe un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(A) = \Omega \cap M$.
2. $f : A \to \Omega \cap M$ es un homeomorfismo (considerando en $\Omega \cap M$ la topología inducida por la de $\mathbb{R}^n$, o equivalentemente, por la de M).
3. Para todo $u \in A$, $rg(D_j f^i|_u) = m$ $(1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n)$.

Probar que $(\Omega \cap M, f^{-1})$ es una carta admisible.

(*Sugerencia:*: para cada $p \in V$, considerar la carta (U, x) con $p \in U$ inducida por cartas usuales (W, ψ) de $\mathbb{R}^n$ adaptadas a M y aplicar (3)(a)).

(6) Construir una variedad diferenciable M de dimensión 2 contenida en $\mathbb{R}^3$ tal que la inclusión $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ sea continua pero no diferenciable.

(7) Sea M una variedad diferenciable y (U, x) una carta de M. Considerando a U y a $x(U)$ como variedades diferenciables con las estructuras inducidas por M y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, verificar que $x : U \to x(U)$ es un difeomorfismo.

(8) Sea $f = (f^1, ..., f^k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $(n > k)$ una función diferenciable y $b \in f(\mathbb{R}^n)$ un valor regular. Sea $M = f^{-1}(b)$ dotada de la única estructura diferenciable que la hace una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - k$. Verificar que

$$T_pM = \{u \in \mathbb{R}^n :< grad(f^j)|_p, u >= 0,\ 1 \leq j \leq k\}$$

(9) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $p \in M$ y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base de M_p. Construir una carta (U, x) de M alrededor de p tal que $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = v_i$ para $i = 1, ..., n$.

(10) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base. Considerando a V como una variedad diferenciable según el ejercicio (1), sea (V, x) la carta inducida por B. Para $u \in V$, se define $J_u : V \to V_u$ por

$$J_u(\sum_{i=1}^{n} a^i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}|_u$$

Probar que J_u es un isomorfismo canónico (i.e., no depende de la base B).

(11) Sea M una variedad diferenciable y $f \in \mathcal{F}(M)$. Probar que la aplicación $df : TM \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

(12) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, x) una carta de M. Dado $p \in U$, sea $a = x(p)$. Probar que $(x^{-1})_{*a} : \mathbb{R}^n_a \to M_p$ satisface $(x^{-1})_{*a}(D_i|_a) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ para $i = 1, ..., n$.

(13) Sean M y N variedades diferenciables, y $f : M \to N$ diferenciable. Probar que:
(a) Si f es constante entonces $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.
(b) Si M es conexa y $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$ entonces f es constante.

(14) Considerando a cada una de las variedades con la estructura diferenciable anteriormente definida sobre ella, probar que las siguientes inclusiones son diferenciables:
(a) $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$
(b) $i : S \hookrightarrow E$, S subespacio de un espacio vectorial E
(c) $i : A \hookrightarrow M$, $A \subset M$ abierto no vacío de una variedad diferenciable M
(d) $i : GL(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow M_n(\mathbb{R})$
(e) $i : M_p \to TM$, M variedad diferenciable, $p \in M$

Analizar en cada caso si se trata o no de inmersiones o sumersiones.

(15) Probar que toda variedad diferenciable es localmente arcoconexa y que sus componentes conexas son abiertas.

(16) Probar que toda variedad diferenciable conexa es arcoconexa.

(17) Probar que toda variedad diferenciable es localmente compacta.

(18) Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d (*Sugerencia*: utilizar el teorema del valor regular).
  (a) $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : det(A) = 1\}$, $d = n^2 - 1$.
  (b) $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = I\}$, $d = n(n-1)/2$.
  (c) $SO(n\mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n, \mathbb{R})$.

(19) Sea I la matriz identidad de $M_n(\mathbb{R})$.
  (a) Probar que el espacio tangente $GL(n, \mathbb{R})_I$ es $M_n(\mathbb{R})$.
  (b) Sea $det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\times}$ la función determinante. Probar que $det_{*I} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (identificando los tangentes) es la traza.
  (c) Describir $SL(n, \mathbb{R})_I$.

(20) Sea $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ el álgebra de cuaterniones. Es decir, el espacio vectorial de dimensión 4 con base $\{1, i, j, k\}$ con la tabla de multiplicación (que resulta asociativa) determinada por $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$. Si $w = a + bi + cj + dk$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), se define $\overline{w} = a - bi - cj - dk$, y $Re(w) = a$. Verificar:
  (a) $w.\overline{w} = |w|^2$, $Re(w\overline{w'}) =< w, w' >$.
  (b) Todo elemento $w \neq 0$ es inversible (multiplicativamente).
  (c) La multiplicación $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es diferenciable, la inversión $\mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H} - \{0\}$ también es diferenciable.
  (d) $\overline{ww'} = \overline{w'}\,\overline{w}$ (*Sugerencia*: considerar los casos $w = 1, i, j, k$, $w' = 1, i, j, k$ y después extender por $\mathbb{R}$-bilinealidad). Concluir que $|ww'| = |w||w'|$.
  (e) $S^3 = \{w \in \mathbb{H} : |w| = 1\}$ es un subgrupo, es una variedad diferenciable de dimensión 3 y la multiplicación e inversión son diferenciables.
  (f) $(\mathbb{R})^{\perp} = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ que lo identificamos con $\mathbb{R}^3$. Si $w \in S^3 \subset \mathbb{H}$, se define la aplicación $(\mathbb{R})^{\perp} \to (\mathbb{R})^{\perp}$ por $v \mapsto wvw^{-1}$.
    (a) Ver que w induce la identidad si y sólo si $w = \pm 1$.
    (b) $|v| = |wvw^{-1}|$, y por lo tanto se tiene definida una aplicación $S^3 \to O(3, \mathbb{R})$, y como S^3 es conexo, de hecho la imagen está contenida en $SO(3, \mathbb{R})$ (¿por qué?). Ver que esta aplicación es morfismo de grupos, diferenciable, con núcleo $\{\pm 1\}$.

(21) (a) Sean X, Y subvariedades de $\mathbb{R}^n$ tales que $X \subset Y$. Probar que X es una subvariedad (sumergida) de Y y que para todo $p \in X$ vale que
$$p + T_pX \subset p + T_pY$$
  (b) Deducir que los conjuntos
$$M : x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad \text{y} \quad M' : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$
  no pueden ser subvariedades de $\mathbb{R}^3$.

(22) (a) Probar que no existe estructura diferenciable sobre la lemniscata que la haga una subvariedad de $\mathbb{R}^2$.
  (b) Idem para $M = \mathcal{L} \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^3$, donde $\mathcal{L}$ es una lemniscata contenida en el plano xy.

(23) Sea M una variedad diferenciable y (V, y) una carta de M con $y(v) = \mathbb{R}^n$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo y sea $x = \varphi \circ y$. Probar que (V, x) es una carta en M y calcular la matriz de cambio de base de $\{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\}$ a $\{\frac{\partial}{\partial y^i}|_p\}$ $(p \in V)$.

(24) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable (en el sentido de Análisis I). Probar que también es diferenciable como aplicación entre variedades, viendo a U y a $\mathbb{R}^m$ con las estructuras diferenciables usuales. Analizar la relación entre $Df(a)$ y f_{*a} para $a \in U$.

(25) Sea M una variedad compacta de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}^n$ diferenciable. Probar que f no puede ser no singular en todo punto.

(26) Probar que una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no puede ser inyectiva. ¿Y si sólo fuese continua?.

(27) Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ e $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión. Dada una carta (U, x) de M, sea $f = i \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}^n$. Probar:
(a) Existe un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que $U = \Omega \cap M$ y $f : x(U) \to \Omega \cap M$ es una biyección.
(b) $f : x(U) \to \Omega \cap M$ es un homeomorfismo
(c) f es diferenciable
(d) $rg(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}|_a) = m$ para todo $a \in x(U)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. (Esto es decir que f es una inmersión).
(*Sugerencia*: utilizar el hecho de que M tiene la topología inducida, que i es diferenciable y que $i_{*p} : M_p \to \mathbb{R}^n_p$ es un monomorfismo para todo $p \in M$).

(28) Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}^n$ una parametrización de M. Mostrar que $df_a(\mathbb{R}^m) = T_{f(a)}M$ para todo $a \in A$.

(29) Sean M y N variedades diferenciables. Consideremos la variedad diferenciable $M \times N$, con las proyecciones canónicas $\pi_1 : M \times N \to M$ y $\pi_2 : M \times N \to N$.
(a) Si P es una variedad diferenciable y $f : P \to M \times N$ es una función, probar que es diferenciable si y sólo si $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.
(b) Si $(p, q) \in M \times N$, probar que $(M \times N)_{(p,q)}$ es canónicamente isomorfo a $M_p \times N_q$.
(c) Si $(p, q) \in M \times N$, se definen las inyecciones $i_q : M \to M \times N$ e $i_p : N \to M \times N$ tomando

$$i_q(m) = (m, q)$$
$$i_p(n) = (p, n).$$

Sea $v \in (M \times N)_{(p,q)}$, y sean $v_1 = (\pi_1)_{*(p,q)} \in M_p$ y $v_2 = (\pi_2)_{*(p,q)} \in N_q$. Sea $f \in \mathcal{F}(M \times N)$. Probar que

$$v(f) = v_1(f \circ i_q) + v_2(f \circ i_p).$$

(d) Probar que $T(M \times N)$ es difeomorfo a $TM \times TN$.

(30) (a) Probar que la función $f : S^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ definida por $f(x_0, ..., x_n) = (x_0 : ... : x_n)$ es diferenciable.
(b) Encontrar un difeomorfismo entre $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ y S^1.

(31) **Acción de un grupo en una variedad**
Sea G un grupo y M una variedad diferenciable. Decimos que G *actúa* (por difeomorfismos) si se tiene una aplicación

$$G \times M \to M$$
$$(g, x) \mapsto g.x$$

tal que $g.(h.x) = (gh).x$ y $1.x = x$ para todos $g, h \in G$ y $x \in M$, y de manera que para cada $g \in G$, la aplicación $x \mapsto g.x$ sea diferenciable (y por lo tanto un difeomorfismo con inversa $x \mapsto g^{-1}.x$).

Decimos que la acción es *libre* si 1 es el único elemento de G que actúa como la identidad (es decir, si $g.x = x$ para todo $x \in M$ entonces $g = 1$). También decimos que la acción es *propiamente discontinua* si para todo $x \in M$ existe un abierto $U \subset M$, con $x \in U$, tal que para todo $g \in G$, $g \neq 1$, vale que $U \cap g.U = \emptyset$.

Sea $X = M/\sim$ el conjunto de órbitas: $x \sim y$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $y = g.x$. Probar que existe una estructura diferenciable en X tal que $p : M \to X$ (la proyección canónica) es un difeomorfismo local.

(*Sugerencia*: Sea (U, φ) una carta de M tal que $U \cap g.U = \emptyset$ para todo $g \neq 1$; ver que se pueden definir cartas en $p(U)$ vía $\psi([x]) = \varphi(x)$, $x \in U$).

(a) Probar que una función $f : X \to N$ en una variedad diferenciable N es diferenciable si y sólo si $f \circ p$ lo es.
(b) Ver que $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ es un ejemplo de esta construcción.
(c) $(\mathbb{Z})^n = \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}^n$ por $(a_1, ..., a_n).(x_1, ..., x_n) = (x_1 + a_1, ..., x_n + a_n)$. Probar que la variedad cociente es difeomorfa a $T^n := (S^1)^n = S^1 \times ... \times S^1$ (esta variedad se llama *toro n-dimensional*).
(d) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actúa en T^2 vía $1.(x, y) = (x, y)$ y $(-1).(x, y) = (-x, -y)$ $(x, y \in S^1)$. El cociente K se llama *Botella de Klein*

(32) **Pegado de variedades**

Sean $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ variedades diferenciables, todas de dimensión n. Sean para $i \neq j$, un abierto $U_{ij} \subset X_i$, y consideremos en U_{ij} la estructura de variedad diferenciable heredada de X_i. Supongamos también que para cada $i \neq j$ tenemos un difeomorfismo $\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ tal que

(I) Para cada $i \neq j$, $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$.
(II) Para cada i, j, k, $\varphi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji} \cap U_{jk}$, y $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ en $U_{ij} \cap U_{ik}$.

Mostrar que existe una variedad diferenciable $(X, \mathcal{A})$ y morfismos $\psi_i : X_i \to X$ para cada i tales que

(A) ψ_i es un difeomorfismo entre X_i y un abierto de X.
(B) Los abiertos $\psi_i(X_i)$ cubren X.
(C) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$.
(D) $\psi_i = \psi_j \cap \varphi_{ij}$ en U_{ij}.

(33) Sean $X_1 = X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| < 2\}$ dos cilindros. Sean $U_{12} = \{(x, y, z) \in X_1 : |z| > 1\}$, $U_{21} = \{(x, y, z) \in X_2 : |z| > 1\}$ y $\varphi_{12} : U_{12} \to U_{21}$ definida por

$$\varphi_{12}(x, y, z) = \begin{cases} (x, y, 3 - z) & \text{si} \quad z > 1 \\ (x, y, -3 - z) & \text{si} \quad z < -1 \end{cases}$$

Probar que la variedad que se obtiene pegando X_1 y X_2 con los datos de pegado es difeomorfa al toro.

(34) Describir de manera explícita la construcción de $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ como pegado de tres copias de $\mathbb{R}^2$.

(35) Sea $M^r_{m \times n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) : rg(A) = r\}$. Probar que $M^r_{m \times n}(\mathbb{R})$ es una subvariedad de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de dimensión $mn - (m - r)(n - r) = r(m + n - r)$.

Sugerencia: Si $A \in M^r_{m\times n}(\mathbb{R})$, permutando sus filas podemos escribirla como

$$\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

con $M \in GL(r, \mathbb{R})$. Si consideramos la matriz inversible

$$B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -PM^{-1} & I_{m-r} \end{pmatrix}$$

y multiplicamos por A, tenemos

$$BA = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & Q - PM^{-1}N \end{pmatrix}$$

¿Qué tiene que pasar para que BA tenga rango r?.

(36) **Grassmaniana de k-planos en $\mathbb{R}^n$.**

Consideremos la variedad $X = M^k_{k\times n}(\mathbb{R})$ de matrices de $k \times n$ de rango k. Verificar que es un abierto de $M_{k\times n}(\mathbb{R})$.

Consideremos en X la relación de equivalencia dada por $A \sim B$ si y sólo si existe $G \in GL(k, \mathbb{R})$ tal que $A = GB$. Probar que dos matrices están relacionadas si y sólo si sus filas generan el mismo subespacio de dimensión k de $\mathbb{R}^n$.

Al conjunto cociente $X/\sim$ lo llamamos Grassmaniana de k-planos en $\mathbb{R}^n$ y lo notamos $G(k, \mathbb{R}^n)$. El párrafo anterior muestra que es el espacio de subespacios vectoriales de dimensión k de $\mathbb{R}^n$. Si S es un subespacio de dimensión k de $\mathbb{R}^n$, lo vemos como un punto de $G(k, \mathbb{R}^n)$ usando cualquier matriz cuyas filas sean una base de S.

Vamos a ver que $G(k, \mathbb{R}^n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $k(n-k)$.

Consideremos para cada $I = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., n\}$ el siguiente subconjunto

$$U_I = \pi(\{A : det(A_I) \neq 0\}) = \{\overline{A} : det(A_I) \neq 0\}$$

donde A_I es el menor de $k \times k$ de A cuyas columnas son $i_1, ..., i_k$, $\pi : M^k_{k\times n}(\mathbb{R}) \to G(k, \mathbb{R}^n)$ es la proyección al cociente y $\overline{A} = \pi(A)$. Probar que $U_I = \{S \in G(k, \mathbb{R}^n) : S \cap V_{I^c} = 0\}$, donde V_{I^c} es el subespacio de dimensión $n-k$ de $\mathbb{R}^n$ generado por $\{e_j\}_{j \notin I}$.

Vamos ahora a definir un sistema de coordenadas locales en U_I. Lo hacemos para $I = \{1, ..., k\}$ para facilitar la notación. Dado $\overline{A} \in U_I$, consideramos la matriz

$$A_I^{-1}A = (I_k \mid B)$$

donde I_k es la identidad de $k \times k$. Definimos entonces $\varphi_I : U_I \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ como $\varphi_I(\overline{A}) = B$, donde B es como arriba. Probar que esta asignación está bien definida.

Probar que $\{(U_I, \varphi_I)\}$ define un atlas en $G(k, \mathbb{R}^n)$. (*Sugerencia*: hacer primero el caso $G(2, \mathbb{R}^4)$ para entender la construcción).

Consideremos ahora la aplicación $p : M^k_{k\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ dada por

$$p(A) = (det(A_I))_I$$

donde I recorre todos los subconjuntos de k elementos de $\{1, ..., n\}$ (ordenados de alguna manera). Probar que p induce una aplicación diferenciable

$$P : G(k, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{P}^N\mathbb{R}$$

donde $N = \binom{n}{k} - 1$.

Probar que P es una inmersión.

Si $S \in G(k, \mathbb{R}^n)$ es un subespacio de dimensión k de $\mathbb{R}^n$, al punto $P(S)$ lo llamamos las *coordenadas de Plücker* de S.

Notemos que $G(1, \mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

(37) **Variedades complejas**

Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto no vacío y $f = (f^1, ..., f^m) : U \to \mathbb{C}^m$. Decimos que f es analítica si alrededor de cada punto de U, cada f^i tiene una expansión como serie de potencias (no trivial: esto equivale a que cada f^i sea holomorfa en cada variable por separado). Hacer la definición obvia de *variedad compleja de dimensión n*. Notar que tal variedad M también resulta una variedad diferenciable de dimensión $2n$, que la notamos con M^∞. Definir qué significa que una función $f : M \to N$ entre variedades complejas sea analítica.

Para cada $p \in M$, un vector tangente v a M en p es una $\mathbb{C}$-derivación en p, $v : \mathcal{O}(M) \to \mathbb{C}$ (siendo $\mathcal{O}(M)$ el conjunto de funciones analíticas de M en $\mathbb{C}$). Con M_p notamos al espacio tangente (complejo) de vectores tangentes a M en p.

Probar que se pueden identificar naturalmente los espacios M_p y M_p^∞. (*Sugerencia*: coordenadas locales complejas $z^1, ... z^n$ alrededor de p dan lugar a coordenadas locales reales $x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n$, donde $z^r = x^r + iy^r$. Esto nos da bases $\{\frac{\partial}{\partial z^1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial z^n}|_p\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_p, \frac{\partial}{\partial y^1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial y^n}|_p\}$ de M_p y de M_p^∞ como $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$ espacios vectoriales respectivamente.) Probar que bajo esta identificación natural, $\frac{\partial}{\partial z^r}|_p = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^r}|_p - i\frac{\partial}{\partial y^r}|_p)$.

Recordemos que una función $f = u + iv : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica si y sólo si es diferenciable y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Probar que esto equivale a que $f_{*p} : U_p^\infty \to \mathbb{C}_{f(p)}^\infty$ sea $\mathbb{C}$-lineal para todo $p \in U$ (viendo a U y a $\mathbb{C}$ como variedades complejas). Deducir que una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es analítica si y sólo si $f_{*p} : U_p^\infty \to \mathbb{C}_{f(p)}^\infty$ es $\mathbb{C}$-lineal para todo $p \in U$.

Sean M y N variedades complejas, y $f : M \to N$ diferenciable. Probar que f es analítica si y sólo si $f_{*p} : M_p^\infty \to N_{f(p)}^\infty$ es $\mathbb{C}$-lineal para todo $p \in M$.

Una variedad compleja de dimensión 1 se llama una *superficie de Riemann*.

(38) Probar que S^2 es una superficie de Riemann (*Sugerencia*: las proyecciones estereográficas dan las cartas).

Nombre: S^2 se llama *esfera de Riemann*.

(39) **Espacio proyectivo complejo**

Consideremos en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ la siguiente relación de equivalencia: $z \sim w$ si y sólo si $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Sea M el conjunto de clases de equivalencia. Notamos con $(z_0 : ... : z_n)$ la clase de un punto $(z_0, ..., z_n)$. Sean $U_i = \{(z_0 : ... : z_n) \in M : z_i \neq 0\}$ (notar que la condición está bien definida) y $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ definidas por

$$\varphi_i(z_0 : ... : z_n) = (\frac{z_0}{z_i}, ..., \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, ..., \frac{z_n}{z_i})$$

Probar que las cartas (U_i, φ_i) definen en M una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$ y una estructura de variedad compleja de dimensión n. Esta variedad se llama *espacio proyectivo complejo* de dimensión (compleja) n y lo notamos con $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$.

(a) Probar que $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ es difeomorfo como variedad compleja (y por lo tanto como variedad diferenciable) a S^2.

(b) ¿Es cierto que $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ es difeomorfo (como variedad diferenciable) a $\mathbb{P}^{2n}\mathbb{R}$?