GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Práctica 3

CAMPOS - GRUPOS DE LIE

(1) Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$. Si $v \in M_p$, probar que existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$.

(2) Sea $M = \mathbb{R}^2$. Identificando M_p con M de la manera natural, probar que no existe una carta (U, x) tal que los campos $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}$ coincidan respectivamente con los campos $(x, y) \mapsto (1, 0)$, $(x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$.

(3) Sea $f : M \to N$ una función diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$.
   (a) Probar que si $X \sim_f Y$ y c es una curva integral de X entonces $f \circ c$ es una curva integral de Y.
   (b) Son equivalentes:
      (I) $X \sim_f Y$
      (II) Para todo $U \subset N$ abierto y $g \in \mathcal{F}(U)$, $Y(g) \circ f = X(g \circ f)$ en $f^{-1}(U)$.
      (III) Para toda $g \in \mathcal{F}(U)$, $Y(g) \circ f = X(g \circ f)$ en $f^{-1}(N)$.

(4) Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ el campo de vectores nulo, i.e., $X(p) = 0$ para todo $p \in M$. ¿Es completo? ¿Cuál es su grupo uniparamétrico de difeomorfismos?

(5) Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $c : (a, b) \to M$ una curva integral de X. Sea $\varphi : (c, d) \to (a, b)$ un difeomorfismo. ¿Bajo qué condiciones es $c \circ \varphi$ una curva integral de X?

(6) Sea c una curva integral de $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\dot{c}(t_0) = 0$ para algún t_0 en el dominio de la curva. Probar que c es constante.

(7) En los siguientes casos determinar, para cada $p \in M$, la curva integral maximal $\phi_p : I_p \to M$ de X que satisface $\phi_p(0) = p$. Decidir si X es o no completo.
   (a) $M = \mathbb{R}^2$, $X(u) = u_1 D_1|_u - u_2 D_2|_u$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) $M = \mathbb{R}$, $X(u) = u^2 D|_u$, $u \in \mathbb{R}$.
   (c) $M = \mathbb{R}^2$, $X(u) = u_2 D_1|_u - u_1 D_2|_u$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

(8) Deducir del ejercicio anterior que el grupo uniparamétrico de difeomorfismos $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ generado por $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ está dado por

$$\phi(t, (a, b, c)) = (a \quad b) \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

para el campo del inciso (a), y por

$$\phi(t, (a, b, c)) = (a \quad b) \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

para el campo del inciso (c).

(9) Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ dado por $X(u) = u_1^2 D_1|_u + u_3 D_2|_u - u_2 D_3|_u$.
   (a) Calcular su flujo y decidir si es completo.
   (b) Encontrar la curva integral de X que pasa por $(0, 1, 0)$ en el instante $t = 0$.

(10) En cada uno de los siguientes casos, calcular el grupo uniparamétrico generado por el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(a) $M = \mathbb{R}^2$, $X(u_1, u_2) = (u_2, u_1)$ (identificando $\mathbb{R}^2_p \simeq \mathbb{R}^2$).

(b) $M = \mathbb{R}^2$, $X(u_1, u_2) = (u_1, -u_2)$.

(c) $M = GL(n, \mathbb{R})$, $X(A) = BA$, con $B \in M_n(\mathbb{R})$.

(11) En cada uno de los siguientes casos probar que $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ es un grupo uniparamétrico y calcular su generador $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(a) $M = V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\phi(t, v) = ta + v$, con $a \in M$ fijo.

(b) $M = T^2 = S^1 \times S^1$, $\phi(t, z, w) = (e^{2t}z, e^{-t}w)$.

(c) $M = GL(2, \mathbb{R})$, $\phi(t, A) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$.

(d) $M = S^1 \times \mathbb{R}$, $\phi(t, z, x) = (e^{tx}, z)$.

(12) Sea N una variedad diferenciable de dimensión k, $M \subset N$ una subvariedad de N de dimensión n e $i : M \hookrightarrow N$ la inclusión. Sea $X \in \mathfrak{X}(N)$ tal que $X(p) \in i_{*p}(M_p) \subset N_p$ para todo $p \in M$.

(a) Se define $Y : M \to TM$ por $Y(p) = v$, donde $v \in M_p$ es el único que satisface $i_{*p}(v) = X(p)$. Probar que $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) Deducir que $Y \sim_i X$. Además, Y es el único con esta propiedad.

(c) Para cada $p \in M$, sean $\phi_p : I_p \to N$ la curva integral maximal de X con $\phi_p(0) = p$ y $\psi_p : J_p \to M$ la curva integral maximal de Y con $\psi_p(0) = p$. Probar que $J_p \subset I_p$ y que $\psi_p = \phi_p|_{J_p}$.

(13) Sea $i : S^{2n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ la inclusión. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n})$ definido por

$$X(u) = \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j u_{2n-j} D_{j+1}|_u.$$

(a) Probar que para todo $n \geq 1$, $X(p) \in i_{*p}(S^{2n-1}_p)$ si $p \in S^{2n-1}$.

(b) Sea $Y \in \mathfrak{X}(S^{2n-1})$ el único que satisface $Y \sim_i X$. Calcular el flujo maximal de Y (para $n = 2$) $\phi : \mathbb{R} \times S^3 \to S^3$.

(14) Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ completo y c una curva integral maximal de X. Probar que si c no es inyectiva entonces es periódica.

(15) Sea M una variedad, $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo, $c : (a, b) \to M$ la curva integral maximal de X tal que $c(0) = p$. Si existe $t \neq 0$ tal que $c(t) = p$, probar que $(a, b) = \mathbb{R}$.

(16) Si (U, x) es una carta de M, calcular una curva integral del campo $\frac{\partial}{\partial x^1} \in \mathfrak{X}(U)$.

(17) Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $X(u) = u_2 D_2|_u$, $Y(u) = u_1 D_2|_u$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Probar que $[X, Y] = -Y$.

(18) Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $X(p) = D_1|_p$, $Y(p) = \cos(p_1) D_1|_p + \sin(p_2) D_2|_p$, $p = (p_1, p_2)$. Sea $G = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| < 1, p_2 > 0\}$. Probar

(a) $\{X(p), Y(p)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2_p$ para todo $p \in G$.

(b) para ningún $p \in G$ existe una carta (U, x) de $\mathbb{R}^2$ con $p \in U \subset G$ tal que $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$ sobre U.

(19) Sea G un grupo de Lie y $X \in \mathfrak{X}(G)$ invariante a izquierda. Probar que $X \sim_{L_g} X$ para todo $g \in G$, donde $L_g(h) = g.h$.

(20) Probar que los siguientes grupos son de Lie:
(a) S^1 y S^3 (Nota: ninguna otra esfera lo es).
(b) T^n.
(c) $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$.

(21) Describir Lie$(O(n, \mathbb{R}))$, el álgebra de Lie del grupo ortogonal. Lo mismo con $SO(n, \mathbb{R})$.

(22) Haciendo la identificación $GL(n, \mathbb{R})_I \simeq M_n(\mathbb{R})$, probar que el corchete de Lie está dado por $[X, Y] = XY - YX$ (producto usual de matrices). Probar lo mismo para $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$ y $SO(n, \mathbb{R})$.

(23) Probar que $SO(2, \mathbb{R})$ es isomorfo a S^1 y concluir que es abeliano.

(24) Probar que $SO(3, \mathbb{R})$ es difeomorfo a $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$.

(25) Sean G y H grupos de Lie y $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie. Probar que un morfismo diferenciable $f : G \to H$ induce un morfismo de álgebras de Lie $f_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ vía la diferencial.

(26) Probar que el álgebra de Lie de un grupo de Lie abeliano tiene corchete trivial, i.e., $[X, Y] = 0$ para todos X, Y. Un álgebra de Lie con esta propiedad se dice *abeliana*.

(27) Para cada uno de los siguientes casos, verificar que la curva $c_v : \mathbb{R} \to G$ con $v \in G_1$ es un subgrupo uniparamétrico de G que satisface $\dot{c_v}(0) = v$ y que $X \in \mathfrak{X}(G)$ es el correspondiente campo invariante a izquierda generado por v.
(a) $G = (\mathbb{R}^n, +)$, $v = \sum_{i=1}^n v_i D_i|_0$, $c_v(t) = t.(v_1, ..., v_n)$, $X(u) = \sum_{i=1}^n v_i D_i|_u$.
(b) $G = (\mathbb{R}_{>0}, .)$, $v = aD_1$, $c_v(t) = e^{at}$, $X(u) = auD_u$.