Geometría Diferencial

Práctica 4

Álgebra multilineal y formas

Álgebra Multilineal

Definiciones y Notaciones. V denotará un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita n. Para $k \geq 1$, $V^k = V \times \cdots \times V$ (k veces) y $V^0 = \mathbb{R}$. Si $(r,s) \neq (0,0)$, $T^r_s(V)$ denotará el espacio vectorial de las funciones multilineales de $(V^*)^r \times V^s$ en $\mathbb{R}$; tomamos $T^0_0(V) = \mathbb{R}$. De la misma manera, $V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$ (k veces) y $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. Para $(r,s) \neq (0,0)$, sea $V_{r,s} = V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$, $V_{0,0} = \mathbb{R}$. $\mathbb{S}_k$ denotará el grupo simétrico en k elementos.

(1) Probar que $T^r_s(V)$ es isomorfo a $V_{r,s}$.

(2) Definimos $E(V) = \bigoplus_{r,s\geq 0} V_{r,s}$. Si $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_1} \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_{s_1}^* \in V_{r_1,s_1}$ y $w = w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r_2} \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_{s_2}^* \in V_{r_2,s_2}$, definimos $v \otimes w = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_1} \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r_2} \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_{s_1}^* \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_{s_2}^* \in V_{r_1+r_2,s_1+s_2}$. Probar que $E(V)$ es un álgebra asociativa (no conmutativa) con este producto, y que se corresponde (vía el isomorfismo del ejercicio anterior) con el producto tensorial visto en la teórica.

(3) Sea $k \geq 2$, y tomemos $\mathfrak{a}_k$ el subespacio de $V^{\otimes k}$ generado por los elementos de la forma
$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$
donde $v_i = v_j$ para algún $i \neq j$. Definimos $\Lambda^k(V) = V^{\otimes k}/\mathfrak{a}_k$, $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ y $\Lambda^1(V) = V$. Notamos con $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ a la clase de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ en $\Lambda^k(V)$. Probar que:
 (a) $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$ si $v_1, ..., v_k$ son linealmente dependientes.
 (b) Si $\sigma \in \mathbb{S}_k$ entonces $v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)} = \operatorname{sgn}(\sigma) v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.
 (c) $\Lambda^k(V) = 0$ si $k > n$.
 (d) $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$ para $k = 0, ..., n$ (*Sugerencia:* si $v_1, ..., v_n$ es una base de V, una base de $\Lambda^k(V)$ está dada por $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$ con $i_1 < \cdots < i_k$).

(4) Definimos el *álgebra tensorial* de V como la subálgebra de $E(V)$ dada por $T(V) = \sum_{k\geq 0} V^{\otimes k}$, y el *álgebra exterior* de V como $\Lambda(V) = \sum_{k\geq 0} \Lambda^k(V)$. Notar que el producto de $E(V)$ se traslada a un producto en $T(V)$ y a uno en $\Lambda(V)$. Probar que si $v \in \Lambda^k(V)$ y $w \in \Lambda^l(V)$ entonces $v \wedge w = (-1)^{kl} w \wedge v$.

(5) Sea $\varphi : V^k \to \Lambda^k(V)$ dada por $\varphi(v_1, ..., v_k) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$. Probar que φ es multilineal y alternada, y que tiene la propiedad universal de que dada cualquier $\psi : V^k \to T$ multilineal y alternada, existe una única $\widetilde{\psi} : \Lambda^k(V) \to T$ lineal tal que $\widetilde{\psi}\varphi = \psi$:

$$\begin{tikzcd} V \times \cdots \times V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & T \\ \Lambda^k(V) \arrow[ur, dashed, "\exists!\widetilde{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

Si llamamos $A_k(V)$ al subespacio de $T^0_k(V)$ formado por las funciones multilineales y alternadas de V en $\mathbb{R}$, deducir que $A_k(V) \simeq \Lambda^k(V)^*$.

(6) Sea $\langle -,- \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por $\langle v^*, u \rangle = \det(v_i^*(u_j))$ para $v^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^*$, $u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$. Probar que es no degenerada y por lo tanto induce un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\Lambda^k(V)^*$ y $\Lambda^k(V^*)$.

(7) Deducir de los dos ejercicios anteriores que $A_k(V) \simeq \Lambda^k(V^*)$.

(8) Sea $A(V) = \sum_{k\geq 0} A_k(V)$ el *álgebra de funciones multilineales alternadas* de V ($A_0(V) = \mathbb{R}$). Por el iso del ejercicio anterior, tenemos definido un producto $\wedge$ en $A(V)$. Probar que si $f \in A_k(V)$ y $g \in A_l(V)$ entonces $f \wedge g \in A_{k+l}(V)$ está dado por

$$(f \wedge g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k,l}} \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}),$$

donde $\mathbb{S}_{k,l} = \{\sigma \in \mathbb{S}_{k+l} : \sigma(1) < \ldots \sigma(k) \text{ y } \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)\}$. Probar (o creerse) que este producto es el mismo que se vio en la teórica.

(9) Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Definir $\det(f)$ sin apelar a ninguna base de V. Probar que si g es otro endomorfismo, $\det(fg) = \det(f)\det(g)$. (*Sugerencia*: considerar $\Lambda^n(V)$).

FORMAS

(10) Sea M una variedad, ω una 1-forma. Sean (U, x), (V, y) dos cartas alrededor de un punto $p \in M$. Si $\omega(p) = \sum_i \alpha_i dx_p^i = \sum_i \beta_i dy_p^i$, encontrar la relación entre los α_i y los β_i.

(11) Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, y $df : M \to T^*M$ definida por $df(p) : M_p \to \mathbb{R}$, $v \mapsto v(f)$. Mostrar que en un sistema de coordenadas (U, x), df se escribe como $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, por lo tanto df es una sección diferenciable, es decir, una 1-forma.

(12) Sea $\eta \in \Omega^1(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$. Mostrar que $f\eta \in \Omega^1(\mathbb{R})$. Mostrar que si $g \in \mathcal{F}(M)$ entonces $d(fg) = fdg + gdf$.

(13) Sea $M = \mathbb{R}^n$, que en cada punto su tangente es $\mathbb{R}^n$, con su producto interno usual. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, y definamos $\langle X, - \rangle$ de la manera siguiente: si $v \in T_pM$, $\langle X, v \rangle := \langle X(p), v \rangle$. Mostrar que $\langle X, - \rangle$ es una 1-forma. Mostrar que toda 1-forma es de esta forma. Por ejemplo, $df = \langle \nabla f, - \rangle$.

(14) Si ω es una k-forma, ¿es cierto que $\omega \wedge \omega = 0$? ¿Y si $\dim M = 3$?

(15) Si (U, x) es una carta de la variedad M, sea $\omega_x \in \Omega^n(U)$ definida por $\omega_x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Llamaremos a ω_x la n-forma asociada a la carta (U, x).
   (a) Verificar que $\omega_x(p)(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p) = 1$ para todo $p \in U$.
   (b) Sea (V, y) otra carta de M tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Probar que $\omega_y(p) = J_{y\circ x^{-1}}(p)\omega_x(p)$ para todo $p \in U \cap V$. Es decir,
   $$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = J_{y\circ x^{-1}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$
   sobre $U \cap V$, donde $J_{y\circ x^{-1}}$ indica el jacobiano de la aplicación $y \circ x^{-1}$.

(16) Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$, $v \in M_p$ y $\gamma \in M_p^*$. Probar que existen $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ tales que $X(p) = v$ y $\theta(p) = \gamma$.

(17) Sea M una variedad diferenciable, W un abierto no vacío de M, $Z \in \mathfrak{X}(W)$, $\omega \in \mathfrak{X}^*(W)$ y $p \in W$. Probar que:

(a) Existe un abierto U de M con $p \in U \subset W$ y un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X|_U = Z|_U$.
(b) Existe un abierto V de M con $p \in V \subset W$ y una 1-forma $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ tal que $\theta|_V = \omega|_V$.

(18) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $V \in \mathfrak{X}(M)$. Definamos la función $i_V : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ como

$$i_V(\omega)(p)(v_1, ..., v_{k-1}) = \omega(p)(V(p), v_1, ..., v_{k-1}),$$

donde vemos a ω como un campo de aplicaciones multilineales alternadas. Para 0-formas definimos $i_V(f) = 0$.

Sea (U, x) una carta alrededor de p, y escribamos V y ω en coordenadas locales como

$$V|_U = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\omega|_U = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} b_{i_1,...,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Escribir en coordenadas locales $i_V(\omega)$.

(19) Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre dos variedades. Sea $f^* : \mathfrak{X}_k^0(N) \to \mathfrak{X}_k^0(M)$ la adjunta de f. Recordemos que se define de la siguiente manera: si $k = 0$, $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. Para $k \ge 1$, si $T \in \mathfrak{X}_k^0(N)$ es un campo de covectores de grado k, al que identificamos, en cada $q \in N$, con un campo de aplicaciones multilineales $N_q \times \cdots \times N_q \to \mathbb{R}$, entonces $f^*(T)$ está dado por

$$f^*(T)(p)(v_1, ..., v_k) = T(f(p))(f_{*p}(v_1), \ldots, f_{*p}(v_k))$$

para $p \in M$.

Si (U, x) es una carta de M alrededor de p, (V, y) es una carta de N alrededor de $q = f(p)$, $f(U) \subset V$ y T se escribe localmente como

$$T|_V = \sum_{1 \le i_1, ..., i_k \le n} a_{i_1,...,i_k} dy^{i_1} \otimes \cdots \otimes dy^{i_k},$$

escribir localmente $f^*(T)$ en la carta (U, x). Probar que si T es alternado también lo es $f^*(T)$.

(20) Sea $f : N \to M$ una aplicación diferenciable. Probar que para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$ satisface las siguientes propiedades:
(a) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$.
(b) $f^*(g.\omega) = g \circ f.f^*(\omega)$ si $g \in \mathcal{F}(M)$.
(c) $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\theta)$.

(21) Sea M una variedad diferenciable, (U, x) una carta y $\omega \in \Omega^k(M)$. Calcular $d\omega|_U$ en las coordenadas de (U, x) para los casos $0 \le k \le 2$.

(22) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ la diferencial exterior. Probar:
(a) Si $f \in \mathcal{F}(M)$ entonces $df \in \Omega^1(M) = \mathfrak{X}_1^0(M)$ es la diferencial usual.
(b) Sea (U, x) una carta de M. Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que

$$\omega|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Entonces

$$d\omega|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

(c) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.
(d) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ si $\omega \in \Omega^k(M)$.
(e) $d^2(\omega) = 0$.
(f) Si $f : M \to N$ es diferenciable entonces $d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$ para toda $\omega \in \Omega^k(N)$ con $k \geq 0$.

(23) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable ("clásico").
(a) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v) := \langle F(x), v\rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, probar que ω determina un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^1 = \omega$.
(b) Demostrar ahora que $\omega_F^2(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v\rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Calcular sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^2 = \omega$.
(c) Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$. Encontrar la relación entre
(I) df y ∇f,
(II) $\operatorname{rot} F$ y $d\omega_F^1$,
(III) $\operatorname{div} F$ y $d\omega_F^2$ (aquí identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ usando la base $dx \wedge dy \wedge dz$).
Concluir, usando la relación $d \circ d = 0$, las fórmulas clásicas $\operatorname{rot} \nabla \equiv 0$ y $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$.

(24) Sea $M = \mathbb{R}^4$, denotando a sus puntos con letras (t, x, y, z). Escribir explícitamente las formulas para d en la base de las formas dada por $\{dt, dx, dy, dz\}$, $\{dt \wedge dx, dt \wedge dy, dt \wedge dz, dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$, $\{dt \wedge dy \wedge dz, dt \wedge dz \wedge dx, dt \wedge dx \wedge dy, dx \wedge dy \wedge dz\}$, $\{dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz\}$. Buscar en algun libro de electromagnetismo las ecuaciones de Maxwell y comparar.

(25) Sean A, B abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to B$ diferenciable. Probar:
(a) $f^*(du^i) = df^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial u^k} du^k$ ($u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$).
(b) $f^*(g.du^1 \wedge \cdots \wedge du^n) = g \circ f. \det(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}).du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$, para $g \in \mathcal{F}(B)$.

(26) Sea M una variedad diferenciable y sea $\omega \in \Omega^k(M)$. Diremos que ω es una k-forma *cerrada* si $d\omega = 0$ y diremos que es una k-forma *exacta* si existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$. Probar que:
(a) Toda forma exacta es cerrada.
(b) Si ω, ω' son formas cerradas y ω'' es exacta entonces $\omega \wedge \omega'$ es cerrada y $\omega \wedge \omega''$ es exacta.
(c) Si $f : M \to N$ es diferenciable entonces f^* transforma formas cerradas en cerradas y exactas en exactas.

(27) Si $A \in \mathfrak{X}_l^k(N)$ es un campo tensorial de tipo (k, l) sobre N y $\phi : M \to N$ es un difeomorfismo, definimos $\phi^*(A) \in \mathfrak{X}_l^k(M)$ sobre M de la siguiente manera: si $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_k^* \in M_p^*$ y $v_1, v_2, \ldots, v_l \in M_p$ entonces

$$[\phi^*(A)(p)]\,(v_1^*, \ldots, v_k^*, v_1, \ldots, v_l) =$$
$$= A(\phi(p))(v_1^* \circ (\phi^{-1})_{*\phi(p)}, \ldots, v_k^* \circ (\phi^{-1})_{*\phi(p)}, \phi_{*p}(v_1), \ldots, \phi_{*p}(v_k)).$$

(a) Verifique que si $k = 0$, la definición coincide con la del ejercicio 19.
(b) Si el campo vectorial X sobre M tiene a Φ como flujo y A es un tensor de tipo (k, l) sobre M, definimos la *derivada de Lie* de A en la dirección de X como

$$(\mathcal{L}_X A)(p) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[(\Phi_h^*(A)(p) - A(p)]$$

Probar que en el caso en que A sea un campo vectorial, la definición es la misma que la vista anteriormente. Demuestre que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(A+B) &= \mathcal{L}_X A + \mathcal{L}_X B\\ \mathcal{L}_X(A\otimes B) &= \mathcal{L}_X A\otimes B + A\otimes \mathcal{L}_X B\\ \mathcal{L}_X(fA) &= X(f)A + f\mathcal{L}_X A\end{aligned}$$

(c) Si A tiene componentes $A^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ en un sistema coordanado dado y $X=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, demuestre que las coordenadas de $\mathcal{L}_X A$ están dadas por

$$(\mathcal{L}_X A)^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l} = \sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial A^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}}{\partial x^i} - \sum_{\alpha=1}^k\sum_{j=1}^n A^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_{\alpha-1},j,j_{\alpha+1},\dots,j_l}\frac{\partial a^{j_\alpha}}{\partial x^j} + \sum_{\alpha=1}^l\sum_{i=1}^n A^{i_1,\dots,i_{\alpha-1},i,i_{\alpha+1},\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\frac{\partial a^i}{\partial x^{i_\alpha}}$$

(28) (derivada de Lie de formas). Sea X un campo. Si ω y η son formas, probar que:
a) $\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta)=\mathcal{L}_X(\omega)\wedge\eta+\omega\wedge\mathcal{L}_X(\eta)$ (¡sin signos!);
b) $\mathcal{L}_X(d\omega)=d(\mathcal{L}_X(\omega))$;
c) $\mathcal{L}_X(f)=X(f)$ si $f\in\mathcal{F}(M)$.
Demuestre que estas propiedades determinan unívocamente a $\mathcal{L}_X$. Utilize este hecho para dar una definición "algebraica" de $\mathcal{L}_X$. Muestre que $\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y-\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X=\mathcal{L}_{[X,Y]}$. Halle la expresión en coordenadas locales.

(29) Recordar que $i_X(\omega):=\omega(X,\dots)$ si $\omega\in\Omega^k(M)$ con $k>0$ e $i_X(f)=0$ para $f\in\mathcal{F}(M)$. Muestre las siguientes identidades, para X e Y campos, y f función diferenciable:
a) $i_X i_Y=-i_Y i_X$
b) $i_{fX}=fi_X$.
c) $i_X d+di_X=\mathcal{L}_X$ (hay dos posibilidades: o bien demuestre esto directamente a partir de una expresión local (largo y cuentoso), o bien demuestre que $\mathcal{L}_X$ definido como $i_X d+di_X$ verifica las propiedades del ejercicio anterior (manera corta y elegante)).
d) $\mathcal{L}_{fX}=f\mathcal{L}_X+df\wedge i_X$
e) $\mathcal{L}_X i_Y-i_Y\mathcal{L}_X=i_{[X,Y]}$ (sugerencia: ver que esta formula es válida aplicada a una f, también es válida aplicada a df, y finalmente ver que $(\mathcal{L}_X i_Y-i_Y\mathcal{L}_X)(\omega\wedge\eta)=(\mathcal{L}_X i_Y-i_Y\mathcal{L}_X)(\omega)\wedge\eta+(-1)^{|\omega|}\omega\wedge(\mathcal{L}_X i_Y-i_Y\mathcal{L}_X)(\eta)$ para deducir la fórmula general por induccion en $|\omega|$).

ORIENTABILIDAD

(30) Sea M una variedad y TM su fibrado tangente. Probar que TM es orientable.

(31) Probar que si M tiene un atlas de la forma $\mathcal{A}=\{(U,x);(V,y)\}$ donde $U\cap V$ es conexo, entonces M es orientable.

(32) Ver que si M es paralelizable, es orientable.

(33) Sea M y N variedades diferenciables. Probar que son equivalentes:
a) M y N son orientables
b) $M\times N$ es orientable

(34) Probar que la esfera S^n y $\mathbb{R}^n$ son orientables. Probar que el n-toro T^n y el cilindro son orientables.

(35) Sea M una variedad orientable conexa y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Si $\mathcal{A}$ es un atlas orientado compatible con la orientación, probar que para dos cartas $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2)$ el signo de $J(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})$ es constante (donde está definida la composición). Interpretar.

(36) Sea M una variedad diferenciable. Suponga que $(TM)\,|_A$ es trivial siempre que $A \subset M$ es homeomorfo a S^1. Demuestre que M es orientable.