Geometría Diferencial

Práctica 5

Integración y teorema de Stokes

(1) Sea M una variedad compacta orientable de dimensión n y ω un elemento de volumen. Probar que $\omega \neq d\eta$ para todo $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$.

(2) Sean M y N variedades orientables de dimensión n y $f : M \to N$ un difeomorfismo que preserva la orientación. Suponiendo que $\omega \in \Omega^n(N)$ tiene soporte compacto, probar que entonces $f^*\omega$ también tiene soporte compacto y vale:

$$\int \omega = \int f^*\omega.$$

Definición. Sea $n \geq 2$ y consideremos a $\mathbb{R}^n$ con la estructura diferenciable usual. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ se denomina una *subvariedad con borde* de dimensión $2 \leq k \leq n$ de $\mathbb{R}^n$ si M es una variedad con borde de dimensión k y la inclusión $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es una sumersión.

(3) Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con borde de dimensión k. Verificar que ∂M es una subvariedad (sin borde) de dimensión $k-1$.

(4) Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con o sin borde de dimensión n y sea $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ el elemento de volumen usual de $\mathbb{R}^n$. Si $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es la inclusión, verificar que $dV_M := i^*(\omega) \in \Omega^n(M)$ es un elemento de volumen para M.

El mismo se denomina el *elemento de volumen usual* para M y la orientación que induce se llama la *orientación usual* de M.

(5) Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una subvariedad compacta con borde de dimensión 2. Sea D un abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene a M y $F_1, F_2 : D \to \mathbb{R}$ diferenciables.

Interpretar (notación) y verificar el *teorema de Green*:

$$\int_{\partial M} F_1.dx^1 + F_2.dx^2 = \int_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x^1} - \frac{\partial F_1}{\partial x^2} \right) .dx^1 \wedge dx^2.$$

(6) Para $p \in \mathbb{R}^n$, sea $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}$ el producto interno definido por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} a^j b^j$$

si $v = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$ y $w = \sum_{j=1}^n b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con o sin borde e $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión. Para $p \in M$, definimos el producto interno $\langle , \rangle_p : M_p \to M_p \to \mathbb{R}$ por

$$\langle v, w \rangle_p = \langle i_{*p}(v), i_{*p}(w) \rangle.$$

Probar:

(a) Si para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se define la aplicación $\langle X, Y \rangle : M \to \mathbb{R}$ como $\langle X, Y \rangle(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle_p$ entonces $\langle X, Y \rangle \in \mathcal{F}(M)$.

(b) La aplicación $\langle , \rangle : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ definida en (a) es un tensor. El mismo se denomina la *métrica de M inducida* por la euclídea de $\mathbb{R}^n$.

(7) Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con o sin borde de dimensión k, con $k \geq 2$ si M tiene borde y con $k \geq 1$ si no lo tiene. Se supone M orientable y sea λ una orientación para M. Si $\omega \in \Omega^k(M)$ es un elemento de volumen, probar:

(a) Si $p \in M$, sean $\{e_1, \ldots, e_k\}, \{e'_1, \ldots, e'_k\}$ dos bases ortonormales de M_p (respecto de $\langle , \rangle_p$) orientadas positivamente; es decir, $[e_1, \ldots, e_k] = [e'_1, \ldots, e'_k] = \lambda(p)$. Entonces $\omega(p)(e_1, \ldots, e_k) = \omega(p)(e'_1, \ldots, e'_k)$.

(b) Sea $f : M \to \mathbb{R}$ definida por $f(p) = \omega(p)(e_1, \ldots, e_k)$, donde $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es una base ortonormal de M_p, orientada positivamente. Entonces $f \in \mathcal{F}(M)$.

(c) Sea $\theta \in \Omega^k(M)$ definida por $\theta = (1/f).\omega$. Entonces θ es el único elemento de volumen para M que satisface $\theta(p)(e_1, \ldots, e_k) = 1$, cualquiera sea $p \in M$ y $\{e_1, \ldots, e_k\}$ base ortonormal de M_p orientada positivamente.

(d) Si $k = n$ entonces $\theta = dV_M$, si λ es la orientación usual (ejercicio 4).

(e) Si $k = n - 1$, existe una única función diferenciable $\mathrm{N} : M \to T\mathbb{R}^n$ que, en cada $p \in M$, satisface:

(I) $\mathrm{N}(p) \in \mathbb{R}^n_p$.

(II) $\langle \mathrm{N}(p), v \rangle = 0$ si $v \in i_{*p}(M_p)$.

(III) $\langle \mathrm{N}(p), \mathrm{N}(p) \rangle = 1$.

(IV) Si $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ es una base de M_p orientada positivamente entonces

$$\{\mathrm{N}(p), i_{*p}(e_1), \ldots, i_{*p}(e_{n-1})\}$$

es una base orientada positivamente de $\mathbb{R}^n_p$ (orientación usual).

Sugerencia: Sea $p \in M$ y $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ una base ortonormal de M_p orientada positivamente. Considerar la aplicación lineal $T(p) : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}$ definida por $T(p)(v) = (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(p)(v, i_{*p}(e_1), \ldots, i_{*p}(e_{n-1}))$. Es decir,

$$T(p)(v) = \det \begin{pmatrix} v^1 & \ldots & v^n \\ e_1(x^1 \circ i) & \ldots & e_1(x^n \circ i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n-1}(x^1 \circ i) & \ldots & e_{n-1}(x^n \circ i) \end{pmatrix}$$

si $v = \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$.

Verificar que $T(p)$ no depende de la base ortonormal -orientada positivamente- elegida y además que $T(p) \neq 0$.

Sea $\eta(p) \in \mathbb{R}^n_p$ el único que satisface $T(p)(v) = \langle \eta(p), v \rangle$ para todo $v \in \mathbb{R}^n_p$. Mostrar que $\eta : M \to T\mathbb{R}^n$ es diferenciable y definir $\mathrm{N} : M \to T\mathbb{R}^n$ por

$$\mathrm{N}(p) = \frac{\eta(p)}{\langle \eta(p), \eta(p) \rangle^{1/2}}.$$

Definición. Con las hipótesis y notaciones del ejercicio anterior, la k-forma construida en (c) -que denotamos con $\theta = dV_M$- se denomina el *elemento de volumen inducido por la métrica euclídea de* $\mathbb{R}^n$ *y la orientación* λ.

Si $k = 1$ (respectivamente $k = 2$), dV_M se denomina el *elemento de arco* (respectivamente *elemento de área*).

La función $\mathrm{N} : M \to T\mathbb{R}^n$ construida en (e) se denomina la *normal exterior a M asociada a* λ.

(8) Con las hipótesis del ejercicio anterior para $k = n-1$, sea $p \in M$ y $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base de M_p. Verificar que:

$$dV_M(p)(v_1, \dots, v_{n-1}) = (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(p)(\mathrm{N}(p), i_{*p}(v_1), \dots, i_{*p}(v_{n-1})).$$

Definición. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ un abierto no vacío y $\mathrm{F} = \sum_{i=1}^n F^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(D)$. La *divergencia* de F se define como

$$\mathrm{div}(\mathrm{F}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial x^i} \in \mathcal{F}(D).$$

Si $n = 3$, el *rotor* de F se define como

$$\mathrm{rot}(\mathrm{F}) = \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

(9) Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una subvariedad compacta con borde de dimensión m y sean $i : \partial M \hookrightarrow M$, $j : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ las inclusiones. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto que contiene a M y $\mathrm{F} \in \mathfrak{X}(D)$ con $\mathrm{F} = \sum_{i=1}^3 F^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

(a) Si $m = 3$, sea λ la orientación usual de M y $dV = dV_M$ el elemento de volumen usual. Sea $\mathrm{N} : \partial M \to T\mathbb{R}^3$ la normal exterior a ∂M asociada a $\partial\lambda$ y $dA = dV_{\partial M}$ el elemento de volumen (área) de ∂M inducido por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$ y la orientación $\partial\lambda$.
Sea $\theta \in \Omega^2(D)$ definida por

$$\theta = F^1.dx^2 \wedge dx^3 + F^2.dx^3 \wedge dx^1 + F^3.dx^1 \wedge dx^2$$

y $\omega = j^*(\theta) \in \Omega^2(M)$.
Utilizando el ejercicio anterior, verificar que $i^*(\omega) = \langle \mathrm{F}, \mathrm{N}\rangle.dA$.

(b) En la situación de (a), verificar el *teorema de la divergencia*:

$$\int_{\partial M} \langle \mathrm{F}, \mathrm{N}\rangle.dA = \int_M \mathrm{div}(\mathrm{F}).dV.$$

(c) Si $m = 2$, sea λ una orientación para M y $dA = dV_M$ el elemento de volumen (área) de M inducido por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$ y la orientación $\partial\lambda$. Sea $\mathrm{N} : M \to T\mathbb{R}^3$ la normal exterior a M asociada a λ y $dS = dV_{\partial M} \in \Omega^1(\partial M)$ el elemento de volumen (arco) inducido por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$ y la orientación $\partial\lambda$.

(I) Mostrar que existe un único $X \in \mathfrak{X}(\partial M)$ que satisface $dS(p)(X(p)) = 1$ para todo $p \in \partial M$.

(II) Sea $\theta \in \Omega^1(D)$ la 1-forma definida por $\theta = F^1.dx^1 + F^2.dx^2 + F^3.dx^3$ y $\omega = j^*(\theta) \in \Omega^1(M)$. Utilizando el ejercicio anterior, verificar que

$$d\omega = \langle \mathrm{rot}(\mathrm{F}), \mathrm{N}\rangle.A.$$

(d) En la situación de (c), sea $T : \partial M \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(p) = (j \circ i)_{*p}(X(p))$ si $p \in \partial M$. Verificar el *teorema del rotor*:

$$\int_{\partial M} \langle \mathrm{F}, T\rangle dS = \int_M \langle \mathrm{rot}(\mathrm{F}), \mathrm{N}\rangle.dA.$$

(10) Enunciar y probar el teorema de la divergencia para $M \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.