GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Práctica 6

CONEXIONES Y VARIEDADES RIEMANNIANAS

(1) Sea ∇ una conexión sobre una variedad M, y sea

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

su torsión. Probar que T es $\mathcal{F}(M)$-bilineal, y por lo tanto define un tensor de tipo (1,2).

(2) Probar que:
(a) Una combinación lineal $\sum_i \alpha_i \nabla^i$, donde los ∇^i son conexiones y $\sum_i \alpha_i = 1$, es una conexión.
(b) La diferencia entre dos conexiones es un tensor.

(3) Probar que si (U,x) es una carta de M, entonces la asignación $(X, (\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i})) \mapsto \sum_i X(\alpha_i)\frac{\partial}{\partial x^i}$ define una conexión en U.

(4) Probar que si ∇ es una conexión en M con torsión T, entonces $\nabla - \frac{1}{2}T$ es una conexión simétrica. Encontrar sus símbolos de Christoffel en función de los de ∇.

(5) Encontrar una métrica de tipo $(1,1)$ sobre el toro.

(6) (a) Consideramos g en $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, la métrica inducida de $\mathbb{R}^3$. Sea (U,x) es la carta tal que $x^{-1} : (0,\pi) \times (0,2\pi) \to S^2$ es $x^{-1}(\theta,\alpha) = (\sin(\theta)\cos(\alpha), \sec(\theta)\cos(\alpha), \cos(\theta))$. Encontrar la expresión local de la métrica g en la carta (U,x). Expresar el elemento de volumen en la misma carta (es decir una 2-forma ω tal que $\omega(p)(v_1,v_2) = \pm 1$ si $\{v_1,v_2\}$ es base ortonormal de M_p.
(b) $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) \ : \ y > 0\}$ (semiplano de Poincaré). Con respecto a la carta usual $(\mathbb{R}^2_+, \mathrm{id})$ consideramos la métrica $g = \frac{1}{y^2}dx \otimes dx + \frac{1}{y^2}dy \otimes dy$. Expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.
(c) Calcular la conexión de Levi-Civita para la métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada, con respecto a la carta usual, por $g_{ii} = 1$ si $1 \leq i \leq n$ y $g_{n+1,n+1} = -1$. (Ver que el teorema de Levi-Civita se puede extender a métricas pseudo-riemannianas.)

(7) Sea M una subvariedad de codimensión 1 de $\mathbb{R}^n$. Sea g la métrica canónica en $\mathbb{R}^n$, sea g_M la métrica sobre M pull-back de g y sea ∇ la conexión asociada a g_M. Probar que para campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_X Y$ coincide con la proyección ortogonal sobre TM de la derivada de $i_*(Y)$ en la dirección $i_*(X)$, donde $i : M \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión.

(8) Sea G un grupo que actúa sobre la variedad X de manera propiamente discontinua. Supongamos que en X se tiene una métrica g.
a) Definir el concepto de "métrica G-invariante".
b) Probar que si g es G-invariante entonces la variedad X/G hereda una métrica de X; i.e, tiene una métrica con la que la proyección $X \to X/G$ es un morfismo de variedades de Riemann.

c) Probar que si G es finito, $\bar{g}$ definida por

$$\bar{g} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} d^* \rho_h(g)$$

es invariante (se nota por ρ_h la acción de $h \in G$ sobre X).

d) ¿Qué sucede en el punto anterior si se tiene una métrica de tipo (r, s)?

(9) Probar que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ hereda una métrica de S^n.

(10) Sea M una variedad difenciable de dimensión n y ∇ una conexión en M. Si $c : I \to M$ es una curva diferenciable, $t_0 \in I$ y $v_1, \dots, v_n$ es base de $M_{c(t_0)}$, sean $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}_c^{\|}$ (campos paralelos a lo largo de c) de modo que $X_i(t_0) = v_i$.

a) Ver que $\mathfrak{X}_c^{\|}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial

b) $X_1(t), \dots, X_n(t)$ son linealmente independientes en $M_{c(t)}$ $\forall\, t \in I$.

c) Si $Y \in \mathfrak{X}_c^{\|}$ es tal que $Y(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ entonces $Y(t) = \sum_{i=1}^n a_i X_i(t)$. Deducir la dimensión de $\mathfrak{X}_c^{\|}$.

(11) Sea (M, g) una variedad Riemanniana con conexión ∇ compatible con la métrica. Probar que si c es una curva en M y $X, Y \in \mathfrak{X}_c^{\|}$ entonces las normas de X e Y se mantienen constantes y el ángulo entre X e Y también.

(12) Sea M una variedad y ∇ una conexión. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, probar que son equivalentes:

a) $\nabla_X X = 0$ (en este caso decimos que X es paralelo).

b) Toda curva integral $c : I \to M$ de X es una geodésica.

(13) Escribir la ecuación de geodésica en términos de los símbolos de Christoffel. Mostrar que las geodésicas en $\mathbb{R}^n$ son las rectas, y que las geodésicas en el semiplano de Poincaré son: o bien rectas verticales, o bien semicírculos con centro en el eje x.

(14) Mostrar que la ecuación de geodésica depende sólo de la parte simétrica de la conexión. Es decir, si ∇ es una conexión y T es un tensor antisimétrico, entonces ∇ y $\overline{\nabla} = \nabla + T$ tienen las mismas geodésicas.