Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre de 2008

Teoremas de la función implícita y del rango constante

En este ejercicio guiado, la palabra 'diferenciable' puede ser reemplazada por C^k (con $k \in \mathbb{N}$) o C^∞. Consideramos demostrado el teorema de la función inversa.

Teorema 1. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, $p \in U$ tal que $J(p) = \det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_p) \neq 0$. Entonces existe un abierto V que contiene a p tal que $f|_V : V \to f(V)$ es biyectiva, $f(V)$ es un abierto, y $(f|_V)^{-1}$ es diferenciable.*

El objetivo es demostrar dos teoremas, que llamaremos el teorema de la función implícita y el teorema del rango constante.

Teorema 2. *(Función implícita) Sea U un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$ y $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, $p = (x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$ y $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}|_p\right)_{i,j=1}^m \neq 0$. Entonces existe un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a x_0, un abierto B que contiene a y_0 y una función $g : A \to B$ con las siguientes propiedades:*

- *si $x \in A$, entonces existe un único $y \in B$ tal que $f(x, y) = 0$;*
- *$f(x, g(x)) = 0 \ \forall x \in A$,*
- *g es diferenciable.*

Daremos una guía de la demostración:

1. Considerar la función $F : U \to \mathbb{R}^{n+m}$ dada por
$$F(x, y) := (x, f(x, y))$$
Considerar el p del enunciado, y verificar que esta F verifica las hipótesis del teorema de la función inversa.
2. Verificar que el diferencial de F es una matriz de bloques
$$dF|_p = \begin{pmatrix} Id_n & 0 \\ * & \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{i,j=1}^n \end{pmatrix}$$
3. Verificar que el abierto V del teorema de la función inversa puede tomarse de la forma $V = A \times B$.
4. Verificar que la inversa de una función del tipo $F(x, y) = (x, f(x, y))$ es necesariamente de la forma $h(x, y) = (x, k(x, y))$.
5. Verificar que $f(x, k(x, y)) = y$, y que por lo tanto la función $g : A \to B$ puede tomarse como $g(x) := k(x, 0)$.

Teorema 3. *(Rango constante) Sea $A_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B_0 \subset \mathbb{R}^m$ dos subconjuntos abiertos, $F : A_0 \to B_0$ diferenciable, y supongamos rango$(df|x) = k$ para todo $x \in A_0$. Si $p \in A_0$ y $q = F(p)$, entonces:*

1. *Existen abiertos $A \subset A_0$, $B \subset B_0$ y difeomorfismo $G : A \to U$ y $H : B \to V$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^n$, V es un abierto de $\mathbb{R}^m$, $H \circ F \circ G^{-1}(U) \subset V$, y*
2. *$H \circ F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0)$.*

Guía de la demostración:

1. Ver que se puede reducir al caso en que $p = 0$, el origen de $\mathbb{R}^n$, y $q = 0$, el origen de $\mathbb{R}^m$.
2. Componiendo con una transformación lineal que permute las coordenadas, verificar que nos podemos restringir al caso en que el primer menor tiene rango k, es decir, $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_p\right)|_{i,j=1}^k \neq 0$.
3. Definir la función $G : A_0 \to \mathbb{R}^n$ por
$$G(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots x_n)$$
y verificar que su diferencial es de la forma
$$dG = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^k & * \\ 0 & Id_{n-k} \end{pmatrix}$$
4. Verificar las hipótesis del teorema de la función inversa para G, restringiendo a algun abierto A_1 que contenga a p.
5. Verificar que la composición $F \circ G^{-1}$ es de la forma
$$F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, \overline{f}(x))$$
y asi deducir que el diferencial de $F \circ G^{-1}$ es de la forma
$$d(F \circ G^{-1}) = \begin{pmatrix} Id_k & 0 \\ * & \left(\frac{\partial \overline{f}_{k+i}}{\partial x_{k+j}}\right)_{i,j=1}^{n-k} \end{pmatrix}$$
6. Verificar que las $\overline{f}$'s dependen sólo de las variales $x_1, \ldots, x_k$.
7. Definir $T : V_1 \to \mathbb{R}^m$ pro la fórmula
$$T(y_1, \ldots, y_m) = y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} + \overline{f}^{k+1}(y_1, \ldots, y_k), \ldots, y_m + \overline{f}^m(y_1, \ldots, y_k))$$
donde V_1 es un entorno del cero suficientemente pequeño como para que $(y_1, \ldots, y_m) \in V$ y para que $T(V_1) \subset B_0$.
8. Verificar que $T(0) = 0$, y que
$$dT = \begin{pmatrix} Id_k & 0 \\ * & Id_{n-k} \end{pmatrix}$$
9. Utilizar el teorema de la función inversa para T, redefinir los abiertos pertinentes, y verificar que $H := T^{-1}$ verifica lo pedido, es decir, que
$$H \circ F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0).$$