Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Fibrados vectoriales

1. Definición y construcción

Definición 1. Sea B un espacio topológico. Un $\mathbb{R}$-fibrado (vectorial) de dimensión d sobre B es una función continua $E \xrightarrow{p} B$ junto con una estructura de espacio vectorial en cada $p^{-1}(x)$ para cada $x \in B$ tal que se satisface:
$\forall b \in B$, existe un abierto U que contiene a b y un homeomorfismo $\phi : p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^d$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{R}^d \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

y además, $\phi_| : p^{-1}(x) \to \mathbb{R}^d$ es un isomorfismo (lineal) $\forall x \in U$

El espacio E se llama **espacio total**, B se llama **base**, la aplicación p se llama **proyección**, un abierto U como antes se llama **abierto trivializante**. Dados dos abiertos trivializantes U_i, U_j, las composiciones $\phi_{Uj} \circ \phi_{Ui}^{-1}$ se llaman **funciones de transición**.

En el caso $B = M$ una variedad, el $E \xrightarrow{p} M$ fibrado se dirá diferenciable si E es una variedad, la función p es diferenciable y para cada U_i trivializante, el homeomorfismo ϕ_i es un difeomorfismo.

Ejemplo: Si M es una variedad, entonces $E = M \times \mathbb{R}^d$ y $p : M \times \mathbb{R}^d \to M$ dada por $p(x, v) = x$ es un fibrado vectorial de dimensión d, que llamaremos **fibrado trivial**. Aquí un abierto trivializante es el mismo M (y todo abierto contenido en M también).

Ejemplo: Si M es una variedad de dimensión n, consideramos el conjunto $TM := \coprod_{x \in M} T_x$ y la aplicación $p : TM \to M$ dada por $p(v) = x$, si $v \in T_x$. Se define la siguiente estructura diferenciable: Si (U, ϕ) es una carta de M, tomamos $\widetilde{\phi} : p^{-1}(U) \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\widetilde{\phi}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_x\right) = (\phi(x), v_1, \ldots, v_n)$$

Ejercicio 1. Probar que TM es una variedad diferenciable de dimensión el doble que la de M.

Ejercicio 2. Probar que tomando (TM, p), con base M, y abiertos trivializantes las cartas de M, resulta TM un fibrado vectorial sobre M.

Ejercicio 3. Sea $E \xrightarrow{p} M$ un fibrado vectorial (de dimensión d). Consideremos U_i un cubrimiento trivializante y llamemos $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

1. Sea $\phi_{ij} : U_{ij} \times \mathbb{R}^d \to U_{ij} \times \mathbb{R}^d$, dada por $\phi_{ij} := \phi_i \phi_j^{-1}$. Observar que $\phi_{ij}(x, v) = (x, \widetilde{\phi}(x, v))$.
   Se puede pensar entonces $\phi_{ij} : U_{ij} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ y vía la ley exponencial, $\hat{\phi}_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.
   Observar que la continuidad de $\hat{\phi}_{ij}$ es equivalente a la de ϕ_{ij}.
   Probar que en el caso diferenciable, la diferenciabilidad de $\hat{\phi}_{ij}$ es equivalente a la de ϕ_{ij}.

2. Probar que las $\hat{\phi}_{ij}$ cumplen la condición de cociclo: $\hat{\phi}_{ij}(x)\hat{\phi}_{jk}(x) = \hat{\phi}_{ik}(x), \forall x \in U_{ijk}$.

3. Sea un cubrimiento U_i de B y funciones continuas $\hat{\phi}_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ que cumplen la condición de cociclo. Se construye entonces el espacio total E de la siguiente manera:
$$E = \amalg_i (U_i \times \mathbb{R}^d)/\sim$$
donde $(x,v)_i \sim (x, \hat{\phi}_{ij}(x)v)_j$. Llamamos π a la aplicación cociente $\amalg_i (U_i \times V) \xrightarrow{\pi} E$.
Probar que la aplicación $p : E \to M$ dada por $p(x,v)_i = x$ es un fibrado vectorial de dimensión d, abiertos trivializantes U_i y que las funciones de transición resultan $\hat{\phi}_{ij}$.

4. Consideremos la misma situación del punto anterior, pero donde $B = M$ una variedad y $\hat{\phi}_{ij}$ diferenciables. Probar que se puede suponer sin pérdidad de generalidad que los U_i son cartas. Ahora, suponiendo que (U_i, φ_i) son cartas (además de abiertos trivializantes) verificar que se tiene una estructura de variedad en E con las cartas $\pi(U_i \times V)$ y que el fibrado del punto anterior resulta un fibrado suave.

Ejemplo: (La banda de Moebius.) Sea $B = S^1$, que la pensamos como $U := S^1 \setminus \{(0,1)\}$ unión $W := S^1 \setminus \{(0,-1)\}$. Consideramos los fibrados $U \times \mathbb{R}$ y $W \times \mathbb{R}$, y los pegamos según la fórmula:
$$\phi : V \cap W \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
Convencerse de que es un fibrado.

Ejemplo: Recordar que el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{(x_0 : \cdots : x_n) \ / \ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ consiste en el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se define el siguiente subconjunto de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$:
$$\mathcal{U} := \{((x_0 : \cdots : x_n), v) \ / \ (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \text{ y } v \in < (x_0 : \cdots : x_n) > \}$$
donde $< (x_0 : \cdots : x_n) >$ significa la recta generada por $(x_0, \ldots, x_n)$. Probar que $\mathcal{U}$ es una variedad diferenciable, de dimensión $n+1$, y que la proyección $\pi : \mathcal{U} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
$$((x_0 : \cdots : x_n), v) \mapsto (x_0 : \cdots : x_n)$$
hace de $\mathcal{U}$ un fibrado (de linea) sobre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Este fibrado se llama Fibrado Universal, o Fibrado Taultológico.

Ejercicio 4. Dar una descripción del fibrado $T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$

2. Morfismos de fibrados

Definición 2. Si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B$ son dos fibrados, un morfismo de fibrados es una función continua $F : E \to E'$ tal que

- $p = p'F$, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & & T \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
- para cada $b \in B$, la aplicación $F| : p^{-1}(b) \to p'^{-1}(b)$ es una transformación lineal.

En el caso de fibrados diferenciables, se pide además que F sea diferenciable.

Ejercicio 5. Sea B un espacio topológico. Probar que la clase de fibrados sobre M, con estos morfismos forman una categoría (que denotaremos $\mathcal{V}ect(M)$). Para M una variedad, probar que lo mismo ocurre con los fibrados diferenciables y los morfismos diferenciables (que notaremos $\mathcal{V}ect_\infty(M)$

Definición 3. Un fibrado se llamará **trivial** si es isomorfo a un fibrado de la forma $M \times \mathbb{R}^d$.

Definición 4. Un fibrado con fibra de dimensión uno se llamará **fibrado de linea**.

Ejercicio 6. Sea $\pi : L \to M$ un fibrado de linea, supondremos M conexo. Si $m \in M$. llamemos 0_m al cero del espacio vectorial V_m. Consideremos el conjunto $L_0 := \{(m, 0_m) : \ / \ m \in M\}$. Demostrar que si L es un fibrado de linea trivial, entonces $L \setminus L_0$ tiene dos componentes conexas.

Ejercicio 7. Demostrar que el fibrado de linea "banda de Moebius"no es trivial. Observar que puede comprobar este hecho empíricamente, recortando por el medio una banda de Moebius, y viendo que queda conexo.

Ejercicio 8. Probar que el fibrado tangente a $\mathbb{S}^1$ es trivial. Decidir si $T\mathbb{S}^n$ es trivial para todo n

Ejercicio 9. Probar que un morfismo de fibrados (resp. diferenciables) $F : E \to E'$ es un isomorfismo si y sólo si es un homeomorfismo (resp. difeomorfismo) y es un isomorfismo lineal en cada fibra.

Ejercicio 10. $E = M \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{p} M$ un fibrado trivial. Probar que los endomorfismos de E están en correspondencia con las funciones diferenciables $\psi : M \to End(\mathbb{R}^d)$. Además, esta correspondencia aplica automorfismos de E en $\psi : M \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ (y viceversa).

Ejercicio 11. Sean $E \xrightarrow{p} M, E' \xrightarrow{p'} M$ dos fibrados (resp. diferenciables). Verificar que se puede tomar un cubrimiento trivializante común U_i. Llamemos ϕ_{ij} a las funciones de transición de E y ϕ'_{ij} a las de E'. Probar que un isomorfismo de fibrados $\Psi : E \to E'$ define para cada i, una función continua (resp. diferenciable) $\psi_i : U_i \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. Comprobar que vale la relación de coborde:

$$\forall x \in U_{ij} : \phi'_{ij}(x) = \psi_i(x)\phi_{ij}(x)(\psi_j(x))^{-1}$$

Recíprocamente, si se tiene para cada i una $\psi_i : U_i \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ continua (resp. diferenciable) tales que se cumple coborde, existe un $\Psi : E \to E'$ isomorfismo de fibrados (resp. diferenciables). Caracterizar de manera análoga los morfismos de fibrados (resp. diferenciables).

Ejercicio 12. Sea $E \xrightarrow{p} M$ un fibrado diferenciable y sea $N \xrightarrow{f} M$ una función diferenciable.

1. Probar que el pullback, $E^* := \{(y, e) \in N \times E | f(y) = p(e)\}$ es una variedad diferenciable y que la aplicación $\overline{p} : E^* \to N$ (dada por la proyección en la primera coordenada) es un fibrado vectorial de fibra V.

2. Probar que f define un funtor $f^* : \mathcal{V}ect_\infty(M) \to \mathcal{V}ect_\infty(N)$.

Ejercicio 13. Decidir si existe algún morfismo de fibrados (no nulo) entre el fibrado de línea trivial sobre $\mathbb{S}^1$ y el fibrado de Moebius.

3. Operaciones con fibrados

Sean $p : E \to M$ y $p' : E' \to M$ dos fibrados. Si $b \in M$, llamemos V_b a $p^{-1}(b)$ y V'_b a $p'^{-1}(b)$.

Construya los siguientes fibrados en su versión continua y diferenciable:

1. (Suma directa.) En cada fibra se pone $V_b \times V'_b$, el fibrado resultante se llama $E \oplus E'$.
2. (*Hom.*) En cada fibra se pone $Hom(V_b, V'_b)$.

3. Como caso particular del anterior, dado $p : E \to M$ un fibrado, se puede considerar el fibrado de linea trivial $E : w' = M \times \mathbb{R}$, y construir entonces el fibrado dual. Llamemos E^* a este fibrado.
4. $\mathrm{Bil}(E \times E')$: en cada fibra poner a $\mathrm{Bil}(V_b \times V'_b, \mathbb{R})$ (las funciones bilineales).
5. (Producto tensorial.) En cada fibra se pone $V_b \otimes V'_b$, el fibrado resultante se llama $E \otimes E'$. Notar que $E \otimes E' \cong Hom(E'^*, E)$, y que $\mathrm{Bil}(E \times E', \mathbb{R}) \cong E^* \otimes E'^*$.

Ejercicio 14. Repetir las construcciones anteriores definiendo el fibrado vía abiertos trivializantes y funciones de transición.

Ejercicio 15. Sea $\pi : L \to B$ un fibrado de linea. Demuestre que $\mathrm{End}(L) = Hom(L, L) = L^* \otimes L$ es un fibrado de linea trivial. Sugerencia: considere la seccion "constantemente identidad"

Ejercicio 16. Probar que si E, E' son fibrados triviales, entonces $E \oplus E'$ es un fibrado trivial.

Ejercicio 17. Probar que si $E \to \mathbb{S}^1$ es el fibrado de linea de Moebius, $E \oplus E$ es trivial.

Ejercicio 18. Consideremos los fibrados tangente $T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ y normal $N\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Probar que la suma directa es trivial.

4. Secciones

Definición 5. Sea $p : E \to M$ un fibrado (resp. diferenciable), una sección es una función continua (resp. diferenciable) $s : M \to E$ tal que $ps = \mathrm{Id}_M$. Es decir, para cada punto $b \in M$ se elige un vector $v \in V_b$ (y esta elección varía continua (resp. diferenciablemente) con respecto a b). El conjunto de secciones de un fibrado $p : E \to M$ se denotará $\Gamma(M, E), \Gamma_\infty(M, E)$.

Ejemplo: $\Gamma_\infty(M, TM) = \mathfrak{X}(M)$.

Ejercicio 19. Si $p : E \to M$ es un fibrado, demuestre que con las operaciones punto a punto $\Gamma_\infty(M, E)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, más aún, es un $C^\infty(M)$-módulo.

Ejercicio 20. Sea $E = M \times \mathbb{R}^d$ el fibrado trivial, entonces $\Gamma_\infty(M, E) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^d) \cong C^\infty(M)^d$. Es decir, $\Gamma_\infty(M, E)$ es un $C^\infty(M)$-módulo libre de rango d.

Ejercicio 21. Sea $E \to M$ un fibrado vectorial. Sea U_i un cubrimiento trivializante y ϕ_{ij} las funciones de transición. Probar que las seccíones globales del fibrado están en correspondencia con los conjuntos de funciones suaves $s_i : U_i \to \mathbb{R}^d$ que cumplen la relación:

$$\forall x \in U_{ij} : s_i(x) = \phi_{ij}(x) s_j(x)$$

Ejercicio 22. Decidir si el fibrado $T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ tiene una sección nunca nula.

Ejercicio 23. Sea $E \xrightarrow{p} M$ un fibrado, Probar que existen k seccíones linealmente independientes (en cada punto) si y sólo si existe un subfibrado de E trivial de dimensión k.

Ejercicio 24. Sea M una variedad diferencial. Probar que se tiene un funtor
$\Gamma_\infty(M, \boldsymbol{.}) : \mathcal{V}ect M \to C^\infty(M) -$ módulos

5. Más ejercicios sobre el tangente

Ejercicio 25. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre dos variedades diferenciables. Recordar que, dado $p \in M$, se define $df_p : T_pM \to T_f(p)N$ por

$$df_p(v) = v \circ f$$

donde $v \in T_p$ se lo interpreta como una derivación del germen de funciones alrededor de p en $\mathbb{R}$. Pruebe que la función $f_* : TM \to TN$ definida por

$$f_*(v) = df_p(v) \text{ si } v \in T_pM$$

es diferenciable, y hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi"] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Notar que f_* es lineal en la fibra. Probar que $(gf)_* = g_* f_*$.

Ejercicio 26. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad, y consideremos $i_* : TM \to T\mathbb{R}^n$. Identificando el tangente a un ponto de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$, convencerse que de esta manera, el espacio tangente a un punto p de M se lo puede pensar inmerso en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 27. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad definida por $f^{-1}(0)$, donde 0 es un valor regular de una cierta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable (por ejemplo, una esfera). Sea $\nabla f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ el campo vectorial "gradiente de f", definido sobre $\mathbb{R}^n$. Considerando, para $p \in M$, $i_*(T_pM) = di_p(T_pM) \subset T_p(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$, demuestre que "el tangente a p en M es ortogonal a $\nabla f|_p$", es decir,

$$i_*(T_pM) = \left\{ \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \;/\; \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \right\}$$

Ejercicio 28. Sea $M = \mathbb{S}^3$, $X_i; i = 1, 2, 3$ los siguientes campos vectoriales en la esfera conseguidos por restricción de los siguientes campos vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$X_1 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$X_2 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$X_3 = -x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

- Verificar que son campos vectoriales en la esfera (es decir, que en cada punto de la esfera da un vector tangente, y que las funciones $X_i : \mathbb{S}^3 \to T\mathbb{S}^3$ son diferenciables).
- Con el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, verificar que en todo punto de la esfera dan una base ortonormal del tangente; probar en consecuencia que $T\mathbb{S}^3$ es trivial.
- Calcular $[X_i, X_j]$ para todo $i, j = 1, 2, 3$, y expresarlo en términos de los X_i's.