Geometría Diferencial - Primer Cuatrimestre de 2008
José Luis Romero

Ejercicio 9 de la práctica 5:
Probar que el álgebra de Lie asociada a $GL(n, \mathbb{R})$ es $gl(n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n\times n}, [,])$

Como $GL(n, \mathbb{R})$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n\times n}$, la identificación entre el tangente en Id de $GL(n, \mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n\times n}$ es la que envía la base canónica a las derivaciones canónicas $\{\partial x_{ij}\}$. Hay que ver que esta asignación hace corresponder el corchete de Lie con el conmutador de matrices.

Sean $A \equiv (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B \equiv (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dos matrices arbitrarias. Definimos

$$X_{Id} := \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\partial x_{ij}|_{Id},$$
$$Y_{Id} := \sum_{i,j=1\dots n} b_{ij}\partial x_{ij}|_{Id}.$$

Extendemos ambas derivaciones por invariancia a izquierda obteniendo campos sobre $GL(n, \mathbb{R})$,

$$X := \sum_{i,j=1\dots n} \alpha_{ij}\partial x_{ij},$$
$$Y := \sum_{i,j=1\dots n} \beta_{ij}\partial x_{ij},$$

donde $\alpha, \beta \in C^\infty(GL(n, \mathbb{R}))$. Calculemos explícitamente estas funciones. Para $C \equiv (c_{ij})_{i,j}$ arbitraria,

$$X_C = dL_C(X_{Id}) = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\partial x_{ij}|_{Id}(\_ \circ L_c).$$

Es decir,

$$X_C(f) = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\partial x_{ij}|_{Id}(f(C\_)),$$

para toda $f \in C^\infty(GL(n, \mathbb{R}))$.

Ahora para $1 \leq s, t \leq n$, calculamos $\alpha_{s,t}(C)$,

$$\begin{aligned}\alpha_{s,t}(C) = X_C(x_{st}) &= \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\partial x_{ij}|_{Id}(D \mapsto (CD)_{st}) \\ &= \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\partial x_{ij}|_{Id}(D \mapsto \sum_{h=1}^{n} c_{s,h}d_{h,t}) \\ &= \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\sum_{h=1}^{n} c_{s,h}\delta_{hi}\delta_{jt} \\ &= \sum_{i=1\dots n} a_{it}c_{s,i} = (CA)_{s,t}.\end{aligned}$$

De la misma manera, $\beta_{st}(C) = (CB)_{st}$.

Observación: lo que acabamos de ver es que si construimos un campo invariante a izquierda X poniendo como coeficientes en $\{\partial x_{ij}|_{Id}\}$ las entradas de una cierta matriz A, resulta que X_C tiene como coeficientes en $\{\partial x_{ij}|_C\}$ las entradas de la matriz CA

Ahora calculemos $[X, Y]$. Usamos el ejercicio 8 de la práctica 5 y recordamos que $[\partial x_{i,j}, \partial x_{s,t}] \equiv 0$.

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \sum_{i,j,s,t=1\ldots n} [\alpha_{i,j}\partial x_{i,j}, \beta_{s,t}\partial x_{s,t}] \\
&= \sum_{i,j,s,t=1\ldots n} \alpha_{i,j}\beta_{s,t}[\partial x_{i,j}, \partial x_{s,t}] + \alpha_{i,j}\partial x_{i,j}(\beta_{s,t})\partial x_{s,t} - \beta_{s,t}\partial x_{s,t}(\alpha_{i,j})\partial x_{i,j} \\
&= \sum_{i,j,s,t=1\ldots n} \alpha_{i,j}\partial x_{i,j}(\beta_{s,t})\partial x_{s,t} - \beta_{s,t}\partial x_{s,t}(\alpha_{i,j})\partial x_{i,j}.
\end{aligned}$$

Como $\alpha_{i,j}(C) = (CA)_{i,j} = \sum_{h=1}^{n} c_{ih}a_{hj}$, resulta que

$$\partial x_{s,t}(\alpha_{i,j}) = \sum_{h=1}^{n} \delta_{is}\delta_{th}a_{hj} = \delta_{is}a_{tj}.$$

Analogamente $\partial x_{i,j}(\beta_{s,t}) = \delta_{is}b_{jt}$. Con esto, evaluamos

$$\begin{aligned}
[X,Y]_{Id} &= \sum_{i,j,s,t=1\ldots n} a_{i,j}\partial x_{i,j}(\beta_{s,t})\partial x_{s,t} - b_{s,t}\partial x_{s,t}(\alpha_{i,j})\partial x_{i,j} \\
&= \sum_{i,j,s,t=1\ldots n} a_{i,j}\delta_{is}b_{jt}\partial x_{s,t} - \sum_{i,j,s,t=1\ldots n} b_{s,t}\delta_{is}a_{tj}\partial x_{i,j} \\
&= \sum_{j,s,t=1\ldots n} a_{s,j}b_{jt}\partial x_{s,t} - \sum_{i,j,t=1\ldots n} b_{i,t}a_{tj}\partial x_{i,j} \\
&= \sum_{s,t=1\ldots n} (AB)_{s,t}\partial x_{s,t} - \sum_{i,j=1\ldots n} (BA)_{i,j}\partial x_{i,j} \\
&= \sum_{i,j=1\ldots n} [AB - BA]_{i,j}\partial x_{i,j}.
\end{aligned}$$