Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Uno

Variedades Topológicas

1. Probar que toda variedad es localmente conexa y localmente compacta. Probar además que toda variedad es unión numerable de compactos.

2. Probar que toda variedad es paracompacta.

3. Probar que un espacio paracompacto, localmente euclideano y Hausdorff no tiene necesariamente una base numerable.

4. Sea $M = I \times I$ con la topología del orden lexicográfico. Probar que M es Hausdorff, localmente euclídea pero no es una variedada topológica.

5. Verificar que un abierto de una variedad es una variedad (de la misma dimensión). Verificar que el producto cartesiano de dos variedades es naturalmente una variedad (su dimensión es la suma).

6. Verificar que la esfera $\mathbb{S}^2$ y el toro son superficies compactas, notar que el toro es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

7. Probar que si identificamos los puntos opuestos del disco $\mathbb{D}^2$ obtenemos una superficie.

8. Probar que los espacios proyectivos reales $\mathbb{P}^n$ son variedades.

9. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 con producto interno. Probar que el conjunto de puntos (x, y) en $V \times V$ ambos de norma 1 y que son mutuamente ortogonales, es una variedad. Calcular su dimensión.

10. Sea C una curva en $\mathbb{R}^3$ (variedad de dimensión 1). Probar que el conjunto de todos los vectores normales a C forman una variedad tridimensional.

Variedades Diferenciables

1. Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d y encontrar un atlas.
   a) Esfera $\mathbb{S}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$, $d = n$ (ver ejercicio siguiente).
   b) Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n / \sim$, donde $x \sim y$ si $x = \pm y$, $d = n$.
   c) Espacio proyectivo, segunda versión: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, donde $x \sim y$ sii son l.d.
   d) Toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (n veces), $d = n$.
   e) Cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$, $d = 2$.

2. Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d.
   a) $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $d = m^2$;
   b) $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $d = (2m)^2$;
   c) $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$, $d = m^2 - 1$;
   d) $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$, $d = (2m)^2 - 2$;
   e) $\mathrm{O}_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = 1\}$, $d = m(m-1)/2$; $I_{n,m}$ es una matriz diagonal con n unos y m menosunos;
   f) $\mathcal{U}(m) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) \mid A.A^* = 1\}$, $d = m^2$ (sugerencia: si $B = AA^*$, entonces $B^* = B$, por lo tanto B tiene valores reales en la diagonal, y los valores por encima de la diagonal determinan a los valores por debajo de la diagonal; con estos datos, puede contar la cantidad de ecuaciones que significa $AA^* = 1$);
   g) $\mathrm{SU}(m) = \{A \in U_m \mid \det(A) = 1\}$, $d = m^2 - 1$.

3. Probar para G cualquiera de los grupos del ejercicio anterior que la multiplicación $\bullet : G \times G \to G$ y tomar inversa $^{-1} : G \to G$ son diferenciables.

4. En $\mathbb{R}$ definimos las cartas $(\mathbb{R}, \mathrm{Id})$ y $(\mathbb{R}, c)$, donde $c(x) = x^3$. Probar que estas cartas no son compatibles. Deducir que los atlas maximales que contienen a cada una de estas cartas son distintos. Por último, probar que estas dos estructuras de variedad diferenciable sobre $\mathbb{R}$ son difeomorfas.

5. Probar que la noción de diferenciabilidad de una función $f : X \to \mathbb{R}$ depende sólo de la clase de equivalencia del atlas de X. Probar que la noción de diferenciabilidad de una función $f : X \to Y$ depende sólo de las clases de equivalencia de los atlas de X e Y.

6. En la recta con dos orígenes: $X = \mathbb{R}^n \cup \{0'\}$, donde $0' \notin \mathbb{R}^n$. Se consideran dos cartas sobre X; una es $(\mathrm{Id}, \mathbb{R}^n)$. La otra es (ϕ, U), donde $U = X - \{0\}$, $\phi(x) = x$ si $x \neq 0$ y $\phi(0') = 0$. Probar que con esta estructura, todo punto de X tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, que el cambio de coordenadas de este atlas es diferenciable, pero X no es una variedad.

7. Probar que $\mathrm{Id} : X \to X$ es diferenciable. Probar que la composición de funciones diferenciables lo es. Probar que $\Delta : X \to X \times X$, $\Delta(x) = (x, x)$ es diferenciable. Probar que las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$, $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son diferenciables.

8. Probar que si M es una variedad conexa de dimensión 1, entonces $M = \mathbb{S}^1$ o $M = \mathbb{R}$.

9. Probar que si M es una variedad, eventualmente con borde, conexa y compacta de dimensión 1, entonces $M = \mathbb{S}^1$ o $M = I$.

10. Probar que si $f : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces $\partial f = f|_{\partial M} : \partial M \to \partial N$ también.

11. Probar que el cilindro con borde $\mathbb{S}^1 \times I$ y la cinta de Möbius con borde no son difeomorfos.

12. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset H^n$ entornos de 0. Probar que U y V no son difeomorfos.