Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Diez
Geometría Riemanniana

1. Sea M una variedad diferenciable y (U, φ) una carta. Probar que la asignación

$$(X, \sum_k a_k \partial_k \varphi) \mapsto \sum_k X(a_k) \partial_k \varphi$$

define una conexión sobre U. En particular, $\mathbb{R}^n$ tiene una conexión standard.

2. Sea $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ una subvariedad regular de codimension 1, con la métrica inducida. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita asociada a M. Probar que si X e Y son campos sobre M, entonces $\nabla_X Y$ coincide con la proyección ortogonal sobre TM de la derivada de $di(Y)$ en la dirección $di(X)$.

3. Sea M una variedad diferenciable y una conexión ∇. Probar que un campo X es paralelo (i.e. $\nabla_X X = 0$) si y sólo si toda curva integral de X es una geodésica.

4. Sea $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ (semiplano de Poincaré). Consideramos la métrica g dada respecto de la carta usual $(\mathbb{R}^2, id)$, por

$$g(x, y) = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy.$$

Expresar la conexion de Levi-Civita en la carta usual.

5. Calcular la conexión de Levi-Civita para la métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada, con respecto a la carta usual, por $g_{ii} = 1$, si $1 \leq i \leq n$, $g_{n+1n+1} = -1$ y $g_{ij} = 0$ en otro caso.

6. Sean (M, g) una variedad riemanniana y $\alpha : I \to M$ una curva suave. Probar que si X e Y son campos paralelos a lo largo de α, entonces la función $p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ es constante. Concluir al transportar paralelamente campos a lo largo de α se preservan las normas y los ángulos.

7. Sean M una variedad riemanniana de dimension n y $\alpha : I \to M$ una curva diferenciable. Sean $t_0 \in I$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $TM_{\alpha(t_0)}$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ campos paralelos a lo largo de α tales que $X_k(t_0) = v_k$.
   (a) Probar que $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ es linealmente independiente para todo $t \in I$.
   (b) Si Y es un campo paralelo a lo largo de α tal que $Y(t_0) = \sum_{k=1}^n a_k v_k$, entonces $Y(t) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(t)$, para todo $t \in I$.
   (c) Concluir que el conjunto de campos paralelos a lo largo de α es un espacio vectorial de dimensión n.

8. Sea G un grupo de Lie, y $\{X_1, ..., X_n\}$ una base de campos invariantes a izquierda. Sea ∇ determinada por $\nabla_{X_i} X_j = 0$ para todo i, j. Demostrar que esta definición es independiente de la base de campos invariantes elegida. Calcular la torsión de esta conexión.

9. Sea G un grupo de Lie y sea $<,>_e$ un producto interno sobre T_eG. Probar que sobre G existe una única métrica riemanniana g de manera que
$$g_e = <,>_e$$
y las traslaciones resultan isometrías (es decir g es *invariante a izquierda*).

10. Para el grupo de Lie $O(n, \mathbb{R})$, recordar la identificación
$$T_x O(n, \mathbb{R}) = \{xA : A + A^t = 0\}, \qquad x \in O(n, \mathbb{R}).$$
Definimos una métrica en $O(n, \mathbb{R})$ por
$$< X, Y > := traza(XY^t).$$
Probar que esta métrica es invariante a izquierda.

11. Sea G un grupo de Lie con su conexión standard. Demostrar que todo campo invariante a izquierda es paralelo (y luego sus curvas integrales son geodésicas). Hallar las geodésicas del Toro con la conexion como grupo de Lie.

12. Consideramos $GL(n, \mathbb{R})$ con su conexión como grupo de Lie. Probar que la geodésica α tal que $\alpha(0) = I$ y $\dot{\alpha}(0) = A \in \mathbb{R}^{n \times n} \simeq T_I(GL(n, \mathbb{R}))$ está dada por
$$\alpha(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$