Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Dos
Funciones diferenciables- Inmersiones y Embeddings- Subvariedades

Nota: En esta práctica diferenciable significa C^∞.

1. Verificar que la noción de diferenciabilidad de funciones entre variedades no depende de las cartas elegidas (buena definición), que las funciones diferenciables son continuas y que si (U, ϕ) es una carta, la función $\phi : U \to \phi(U)$ es un difeo.

2. Sean $f : N \to M$ y $g : A \to B$ diferenciables. Probar que $f \times g : N \times A \to M \times B$, definida por $f \times g(n, a) = (f(n), g(a))$, es diferenciable.

3. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de M y sea $f : M \to N$. Probar que si f restringida a cada abierto $U \in \mathcal{U}$ es diferenciable, entonces f es diferenciable.

4. Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ continua. Probar que f es diferenciable si y sólo si para todo abierto $W \subset N$ y toda función diferenciable g definida en W, se tiene que gf es diferenciable en $f^{-1}(W)$.

5. Sean N, M variedades diferenciables, $n = dim\ N$ y $m = dim\ M$. Probar que, si $rg_p(f) = k$ para todo $p \in N$, entonces existen cartas (U, ϕ) y (V, ψ), con $p \in U$ y $f(U) \subset V$ tales que
   a) $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$
   b) $\psi(f(p)) = 0 \in \mathbb{R}^m$
   c) $\psi f \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$
   d) $\phi(U)$ y $\psi(V)$ son cubos abiertos centrados en el cero y de radio fijo $\varepsilon > 0$.

6. Probar que si $f : M \to N$ es diferenciable y biyectiva y de rango constante $r = dim\ M = dim\ N$, entonces es un difeo.

7. En el ejercicio anterior, sin suponer f biyectiva, probar que $f(M)$ es abierto de N.

8. Sea $f : N \to M$ una inmersión inyectiva propia, es decir la preimagen de compactos es compacto. Probar que f es un embedding. En particular, si $f : N \to M$ es inmersión inyectiva y N compacta entonces f es un embedding.

9. Probar que si $A \subset N$ y $B \subset M$ son subvariedades regulares, entonces $A \times B \subset N \times M$ es subvariedad regular.

10. Sea M una variedad compacta (sin borde) de dimensión n. Probar que no existe ninguna inmersión de M en $\mathbb{R}^n$.

11. Probar que una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no puede ser inyectiva.

12. Probar que la función $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ definida por $f(x_0, \ldots, x_n) = [x_0, \ldots, x_n]$ es diferenciable. Exhibir un difeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.