Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Tres
Espacio Tangente y Campos

Espacios tangentes en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Considerar la superficie
$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$
Dar la fórmula general del plano tangente en un punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

2. Elegir la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de preferencia, el punto preferido de $\mathbb{R}^2$, y ejemplificar el ítem anterior. Notar por ejemplo que si se toma un gráfico del tipo $(x, y, g(x^2 + y^2))$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene una superficie de revolución.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular, es decir, el conjunto $C = \{(x, y) \ / \ f(x, y) = c\}$ es no vacío, y no contiene puntos en donde $\nabla f = 0$. Si $(x_0, y_0) \in C$, verificar que $\nabla f|_{(x_0,y_0)}$ es perpendicular a la curva. Dar la ecuación de la recta tangente a C que pasa por (x_0, y_0).

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular, es decir, el conjunto $C = \{(x, y, z) \ / \ f(x, y) = c\}$ es no vacío, y no contiene puntos en donde $\nabla f = 0$. Si $(x_0, y_0, z_0) \in S$, verificar que $\nabla f|_{(x_0,y_0,z_0)}$ es perpendicular a la superficie. Dar la ecuación del plano tangente a S que pasa por (x_0, y_0, z_0).

5. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Utilizar el ejercicio anterior para dar la fórmula del plano tangente en cada punto de la esfera.

6. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la parametrización de una superficie regular, es decir, f es diferenciable, inyectiva, y $\{\frac{\partial f}{\partial x}|_p, \frac{\partial f}{\partial y}|_p\}$ es l.i. para todo $p \in U$. Llamamos S a la imagen de f. Restringir a f a una sola variable para así definir curvas contenidas en S, cuyos vectores tangentes sean $\frac{\partial f}{\partial x}$ o $\frac{\partial f}{\partial y}$. Mostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}|_p \times \frac{\partial f}{\partial y}|_p$ (el producto vectorial) es un vector normal al plano tangente a s en $f(p)$.

7. Parametrice la esfera S^2 (en coordenadas esféricas) y obtenga una expresión del vector normal al plano tangente. Recuerde que si hace ese cálculo en un punto p, debería dar un vector proporcional a p.

Versiones en más dimensiones

8. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^k$ una función diferenciable. Verifique que $\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in U \times \mathbb{R}^k \ / \ x \in U\}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+k}$ de dimensión n (que admite una carta global). Sea $x_0 \in U$ y $(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{Graf}(f)$. Cuál es la fórmula del espacio tangente al gráfico de f en ese punto?

9. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $k < n$ una función diferenciable y $c \in \mathbb{R}^k$ un valor regular, es decir, $f^{-1}(c)$ es no vacío, y para todo $x \in f^{-1}(c)$, la matriz $df|_x$ tiene rango k. Llamemos $M = f^{-1}(c)$. Si $\sigma : (-1, 1) \to f^{-1}(c)$ es una curva diferenciable, componiendo con f y utilizando regla de la cadena, muestre que, para cualquier $t \in (-1, 1)$, vale que $\sigma'(t)$ está en el núcle de $df|_{\sigma(t)}$. Concluya que si $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$, con cada $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (las coordenadas de f), y $p \in M$, entonces las ecuaciones
$$< \nabla f_i|_p, (v - p) >= 0\}_{i=1}^k$$

son las ecuaciones del espacio tangente a M en p.

10. Verifique que la ecuación del hiperplano tangente a un punto $p = (p_1, \dots, p_{n+1})$ de la esfera S^n está dado por $< p, (v - p) >= 0$.

11. Sea $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ con $k < n$, inyectiva, diferenciable, y $df|_x$ de rango máximo para todo $x \in \mathbb{R}^k$. Sea $M = \mathrm{Im}(f)$. Construir (restringiendo a todas las coordenadas salvo una) curvas contenidas en M a partir de f, y concluir que $\{\nabla f_i | x\}_{i=1}^k$ es una base del espacio tangente a M (dentro de $\mathbb{R}^n$).

12. Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ dada por cualquiera de las formas de los ejercicios anteriores (un gráfico, un valor regular, o parametrizada). Verifique que el espacio tangente a M en un punto p se puede realizar como el conjunto de todos los valores posibles de $\sigma'(0)$ donde $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una curva diferenciable tal que $\sigma(0) = p$. En rigor, esta construcción realiza al "espacio paralelo al tangente a M en p que pasa por el origen".

Campos

13. Sea M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_p(M)$ un vector tangente. Probar que existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$.

14. Sea $p \in M$, X un campo definido en un entorno de p tal que $X(p) \neq 0$. Probar que existe una carta (U, ϕ), con U incluido en el dominio de X, tal que $X|_U = \partial\phi 1$.

15. Sea $p \in M$, $X_1, \dots, X_k$ campos definido en un entorno de p tales que $\{X_1(p), \dots, X_k(p)\}$ es un conjunto l.i. en T_pM. Probar que existe un entorno U de p tal que $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$ es un conjunto l.i., para todo $q \in U$.

16. Sea X un campo en M, y lo consideramos como derivación $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $f \mapsto X(f)$ por la fórmula
$$(X(f))(p) := X(p)(f)$$
Si Y es otro campo, y lo consideramos como derivación, verificar a través de un ejemplo que $X \circ Y$ no es necesariamente una derivación, pero sin embargo $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ si lo es.

17. Consideremos $(x_1, \dots, x_n)$ un sistema de coordenadas alrededor de un punto p de una variedad n-dimensional. Verificar que los campos $X_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ satisfacen $[X_i, X_j] = 0 \ \forall i, j$.

18. Sea $M = \mathbb{R}^2$. Identificando T_pM con M de la manera natural, probar que no existe una carta (U, ϕ) tal que los campos $\partial\phi 1$, $\partial\phi 2$ coincidan respectivamente con los campos $(x, y) \mapsto (1, 0)$, $(x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$.

19. Probar que si $M = \mathbb{S}^1$, TM es difeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

20. Probar que los campos vectoriales sobre una variedad tienen estructura de álgebra de Lie, es decir, que el corchete de Lie verifica que es antisimétrico: $[X, Y] = -[Y, X]$, y satisface la igualdad de Jacobi:
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}$$

21. M una variedad ($dim(M) = m$) se dice paralelizable si existen campos $X_1, \cdots, X_m$ tales que para todo $p \in M$, $\{X_1(p), \cdots, X_m(p)\}$ es una base de T_pM. Probar que S^3 es paralelizable, idem el toro T^n.

22. a) Consideremos $\pi : TM \to M$ la proyección canónica. Probar que π es diferenciable de rango constante. Deducir que T_pM es una subvariedad de TM.

b) Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad. Identificamos $T_pM = (di)_p(T_pM) \subseteq T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$. Tomamos $F : TM \to \mathbb{R}$, $F(v) =< v, v >$, producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Probar que $T_1M := F^{-1}(1)$ es una subvariedad de TM de dimensión $2\dim M - 1$.

23. Sea $f : N \to M$ diferenciable y sean $X \in \mathfrak{X}(N)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Decimos que X e Y estan f-relacionados si para todo $q \in M$ y todo $p \in f^{-1}(q)$, se tiene que $d_pf(X_p) = Y_q$. Esto lo denotaremos $f_*(X) = Y$ (notar que no pedimos que f sea sobreyectiva). Probar que si $f : N \to M$ es un difeomorfismo, todo campo $X \in \mathfrak{X}(N)$ está f-relacionado con un único campo en M.

24. Sea $f : N \to M$ diferenciable y sea $X \in \mathfrak{X}(N)$. Probar que un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $f_*(X) = Y$ (en caso de existir) está univocamente determinado si y sólo si $f(N)$ es denso en M.