Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Cuatro
Teorema de Sard, Transversalidad,
Teoría de intersección módulo 2 y Teorema de Borsuk-Ulam

1. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ diferenciable y sea $y \in \mathbb{R}$ un valor regular. Probar que:
   a) $f^{-1}(y)$ tiene un número par de puntos.
   b) Si $f^{-1}(y)$ tiene $2k$ puntos, entonces f tiene al menos $2k$ puntos críticos.

2. Sea M variedad diferenciable y $A \subset M$ subespacio conexo. Probar que, si existe una retracción diferenciable, es decir una función diferenciable $r : M \to M$ tal que $r(M) = A$ y $r|_A = id$, entonces A es una subvariedad diferenciable de M.

3. Sea $f : M \to N$ diferenciable, donde M es variedad con borde y N sin borde y sea $A \subset N$ subvariedad regular sin borde. Probar que si $f \pitchfork A$ y $\partial f \pitchfork A$, entonces $f^{-1}(A) \subset M$ es subvariedad regular con borde y $\partial(f^{-1}(A)) = \partial M \cap f^{-1}(A)$.

4. Probar la siguiente versión del teorema de Sard para variedades con borde: Sea $f : M \to N$ diferenciable, M con borde y N sin borde. Entonces casi todo punto de N es valor regular de f y de ∂f.

5. Sean X, Y subvariedades de $\mathbb{R}^n$. Probar que para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $X + a \pitchfork Y$.

6. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ diferenciables, con X compacta. Sea W una subvariedad regular cerrada en Z y supongamos que g es transversal a W (y por lo tanto $g^{-1}(W)$ es subvariedad de Y). Probar que
$$I_2(f, g^{-1}(W)) = I_2(gf, W)$$

7. Probar que, si $f : X \to Y$ es nullhomotópica (i.e. homotópica a una constante), entonces $I_2(f, Z) = 0$ para toda subvariedad cerrada de dimensión complementaria Z, excepto quizás en el caso que la dimensión de X sea 0.

8. Probar que si Y es una variedad contráctil de dimensión positiva, entonces $I_2(f, Z) = 0$, para toda $f : X \to Y$ con X compacta y toda subvariedad Z cerrada en Y y de dimensión complementaria. (Incluso para el caso en el que dimensión de X sea 0). Deducir que la única variedad compacta contráctil (sin borde) es el singleton.

9. Sea X compacta e Y conexa de la misma dimensión. Sea $f : X \to Y$ tal que $deg_2(f) \neq 0$. Probar que f es sobreyectiva. En particular, si Y no es compacta, $deg_2(g) = 0$ para toda $g : W \to Y$ tal que W compacta de la misma dimensión.

10. Dos subvariedades compactas X, Z de Y se dicen *cobordantes* si existe una subvariedad compacta con borde, W, en $Y \times I$ tal que $\partial W = X \times \{0\} \cup Z \times \{1\}$. Probar que si X y Z son cobordantes en Y, entonces $I_2(X, C) = I_2(Z, C)$ para toda subvariedad C cerrada en Y de dimensión complementaria a X y Z.

11. Probar que la ecuación
$$z^7 + \cos(| z |^2)(1 + 93z^4) = 0$$
tiene solución en $\mathbb{C}$.

12. Probar el teorema de Borsuk-Ulam para el caso $n = 1$: Si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es simétrica (es decir, $f(-x) = -f(x)$), entonces $deg_2(f) = 1$.

13. Sea X una variedad de dimensión $n - 1$ que es el borde de una variedad compacta W. Sea $F : W \to \mathbb{R}^n$ diferenciable y sea $f = \partial F : X \to \mathbb{R}^n$. Probar que, si $z \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular de F que no está en la imagen de f, entonces $F^{-1}(z)$ es finito y $W_2(f, z) = \#F^{-1}(z)$. (Sugerencias: (1) Si z no está en la imagen de F entonces $W_2(f, z) = 0$, (2) Considerar para cada punto en $F^{-1}(z)$ una bola B_i suficientemente chica para que no se intersequen entre si y tomar f_i la restricción de f a cada B_i, probar que $W_2(f, z)$ es la suma de los $W_2(f_i, z)$ módulo 2 y (3) usar la regularidad de z para encontrar B_i tal que $W_2(f_i, z) = 1$ para todo i).

14. Sean $p_1, \ldots, p_n$ polinomios homogéneos reales en $n + 1$ variables, todos de grado impar. Probar que las funciones asociadas en $\mathbb{R}^{n+1}$ se anulan simultáneamente a lo largo de alguna recta por el origen.