Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Cinco
Grupos de Lie y Álgebras de Lie
Acciones de grupos - Curvas integrales

1. Sea G un grupo de Lie conexo y U en entorno abierto de e.
   a) Probar que existe un abierto V tal que $e \in V \subset U$ que cumple $V = V^{-1}$, donde $V^{-1} = \{g^{-1},\ g \in V\}$.
   b) Probar que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, donde $U^n = \{g_1 g_2 \dots g_n,\ g_i \in U\}$.

2. Sea G grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo que es al mismo tiempo una subvariedad regular. Probar que H es cerrado en G.

3. Probar que $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}),\ A^t A = Id\}$ es grupo de Lie.

4. Sea H un subgrupo (algebraico) de un grupo de Lie G. Probar que la clausura $\overline{H}$ también es subgrupo de G.

5. Sea G un grupo de Lie que actúa sobre una variedad diferenciable M. Dado $x \in M$, consideramos el grupo de isotropía G_x.
   a) Probar que G_x es cerrado en G.
   b) Si la acción es transitiva, probar que para todo $x, y \in M$, G_x y G_y son conjugados.

6. Probar que $O(n)$ actúa transitivamente en $\mathbb{S}^{n-1}$ y determinar los grupos de isotropía.

7. Probar que los siguientes grupos discretos G actúan en forma propiamente discontinua sobre la variedad M y calcular la variedad de órbitas M/G.
   a) $G = \mathbb{Z}$ que actúa sobre $M = \mathbb{R}$ via $m.x = x + m$.
   b) G el grupo de raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$ (para un $n \in \mathbb{N}$ fijo) que actúa sobre $\mathbb{S}^1$ por multiplicación.
   c) $G = \mathbb{Z}_2$ actuando en $\mathbb{S}^n$ via $\sigma.x = -x$ (σ el generador del grupo).

8. En el ejercicio 20 de la práctica 3 se probó que $(\mathfrak{X}(M), [,])$ es un álgebra de Lie. Probar que $[,]$ no es $C^\infty(M)$-bilineal. Más precisamente, probar que $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$, para f, g funciones diferenciables y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

9. Probar que el álgebra de Lie asociada a $GL(n, \mathbb{R})$ es $gl(n, \mathbb{R})$.

10. Sean G, H grupos de Lie y sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie asociadas (campos invariantes a izquierda). Dado un morfismo de grupos de Lie $f : G \to H$ e identificando las álgebras de Lie con los tangentes en las identidades, queda definido un morfismo $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Probar que df es morfismo de álgebras de Lie.

11. Sea $(\mathfrak{g}, [,])$ un álgebra de Lie. Si $\dim \mathfrak{g} = 1$, entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana (i.e. $[,] \equiv 0$). Si $\dim \mathfrak{g} = 2$ demuestre que, o bien $\mathfrak{g}$ es abeliana, o bien existe una base $\{x, y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[x, y] = x$.

12. Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ y definamos $[v, w] := v \times w$. Verificar que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie.

13. Sea $\varphi : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie. Probar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "exp"] \arrow[r, "d\varphi"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "exp"'] \end{tikzcd}$$

14. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ un par de campos f-relacionados. Probar que si c es una curva integral de X entonces fc es una curva integral de Y.

15. Si (U, ϕ) es una carta de M, calcular una curva integral del campo $\partial\phi 1$.

16. En cada uno de los siguientes casos calcular el grupo uniparamétrico generado por el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.
    a) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ (vía la identificación $T_x\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$).
    b) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.
    c) $M = \mathrm{GL}_n$, $X(A) = BA$, con $B \in M_n(\mathbb{R})$.

17. Sea M una variedad, $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo, $c : (a, b) \to M$ la curva integral maximal tal que $c(0) = p$. Si $\exists t \neq 0$ tal que $c(t) = p$, probar que $(a, b) = \mathbb{R}$.

18. Sea M una variedad y $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ un grupo uniparamétrico (acción suave). Consideramos el campo definido por

$$X(f)(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\theta_h(p)) - f(p)}{h}.$$

Probar que, en efecto, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y que el flujo asociado es θ. X se llama el <u>generador infinitesimal</u> de θ.

19. En cada uno de los siguientes casos probar que $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ es un grupo uniparamétrico y calcular su generador infinitesimal $X \in \mathfrak{X}(M)$
    a) $M = V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (de dimensión finita) y $\phi(t, v) = ta + v$, con $a \in M$ fijo.
    b) $M = T^2 = S^1 \times S^1$, $\phi(t, z, w) = (e^{2t}z, e^{-t}w)$.
    c) $M = S^1 \times \mathbb{R}$, $\phi(t, z, x) = (e^{tx}, z)$.