Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Seis
Formas diferenciales y orientación

1. Sea $\eta \in \Omega^1(M)$ y $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, mostrar que $f\eta \in \Omega^1(M)$. Mostrar que si $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, entonces $d(fg) = fdg + gdf$.

2. Sea $M = \mathbb{R}^n$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, y definimos $\langle X, -\rangle$ de la manera siguiente: si $v \in T_pM$, $\langle X, v\rangle := \langle X_p, v\rangle$. Mostrar que $\langle X, -\rangle$ es una 1-forma. Mostrar que toda 1-forma es de esta manera. Por ejemplo, $df = \langle \nabla f, -\rangle$.

3. Sea X una variedad, ω una 1-forma. Sean (U, ϕ), (V, ψ) dos cartas alrededor de un punto $x \in X$. Si $\omega(x) = \sum_i \alpha_i d\phi_i = \sum_j \beta_j d\psi_j$, encontrar la relación entre los α_i y los β_j.

4. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, ϕ y ψ en V^*. Mostrar que la aplicación $(v, v') \mapsto \phi(v)\psi(v')$ es una aplicación bilineal definida en $V \times V$ a valores en $\mathbb{K}$. Mostrar que bajo la identificación $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{K}) \cong (V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$, esta forma bilineal se corresponde con $\phi \otimes \psi$.

5. Sea $V = \mathbb{K}^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ la base dual. Consideremos una matriz $A = (a_{ij})$ en $\mathbb{K}^{n\times n}$ y la forma bilineal asociada:
$$b_A((v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n)) := \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$
Mostrar que $f_A = \sum_{ij} a_{ij} e^i \otimes e^j$.

6. Sea V un espacio vectorial, V^* su dual, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{v^1, \ldots, v^n\}$ la base dual. Sea $\mathrm{ev} : V^* \times V \to \mathbb{K}$ la evaluación, es decir, $\mathrm{ev}(\phi, v) = \phi(v)$. Mostrar que ev es bilineal, y que, identificando a los elementos de V como elementos de V^{**}, $\mathrm{ev} = \sum_i v_i \otimes v^i$. En particular, el elemento $\sum_i v_i \otimes v^i \in V^* \otimes V$ no depende de la base tomada. Muestre este hecho directamente.

7. Consider el isomorfismo $V^* \otimes V \cong \mathrm{End}(V)$ dado por $\phi \otimes v \mapsto (w \mapsto \phi(w)v)$. Qué transformación lineal conocida es el elemento $\sum_i v_i \otimes v^i \in V \otimes V^* \cong (V^* \otimes V) \cong (\mathrm{End}(V))^*$? (esta es otra manera de ver que este elemento no depende de bases). Ya que estamos, qué transformación lineal es $\sum_i v^i \otimes v_i \in V^* \otimes V \cong \mathrm{End}(V)$?

8. Sea $\mathcal{S}_n = \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}$ el grupo simétrico en n elementos. Si $f : V \times \cdots \times V \to k$ es n-multilineal, decimos qu f es **simétrica** si $f(v_1, \ldots, v_n) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$ para todo $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Diremos que f es **antisimétrica** o **alternada** si $f(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$ para todo $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Muestre que el conjunto de funciones simétricas es un subespacio de las multilineales, idem para las antisimétricas, y ambos estan en suma directa. Calcular la dimensión de estos espacios en término de n y $\dim(V)$. Mostrar que si $n = 2$, estos dos subespacios generan todas las funciones bilineales. Para $n > 2$ (y $\dim(V) > 1$) no.

9. Sea $u \in \Lambda^k(V)$ y $v \in \Lambda^l(V)$. Entonces $u \wedge v \in \Lambda^{k+l}(V)$ cumple $u \wedge v = (-1)^{kl} v \wedge u$.

10. Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de V y sea $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, d\}$ (con $i_1 < i_2 < \dots < i_r$). Notaremos $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$. Probar que $\{e_I\}$ (donde I se mueve por todos los subconjuntos de r elementos de $\{1, \dots, d\}$) forma una base de $\Lambda^r(V)$. Deducir que la dimensión del espacio vectorial $\Lambda^r(V)$ es $\binom{d}{r}$ y la de $\Lambda(V)$ es 2^d.

11. Probar la propiedad universal de $\Lambda^k(V)$ respecto de las funciones k-multilineales $V \times \dots \times V \to W$ y deducir que $(\Lambda^k(V))^*$ es naturalmente isomorfo a $A_k(V)$, donde $A_k(V)$ denota el espacio vectorial de funciones k-multilineales alternadas de V en $\mathbb{K}$.

12. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $A(V) = \bigoplus A_k(V)$, las multilineales alternadas de V en $\mathbb{R}$. Por el ejercicio anterior y via la identificación de $\Lambda(V^*)$ con $\Lambda(V)^*$, obtenemos un isomorfismo lineal $A(V) = \Lambda(V^*)$. De esta forma $A(V)$ hereda de $\Lambda(V^*)$ una estructura de álgebra (graduada). Probar que la multiplicación en $A(V)$ queda definida por la siguiente fórmula: Si $f \in A_k(V)$ y $g \in A_l(V)$,

$$f \wedge g(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{(k,l)-shuffles} sg(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

donde un $(k,l) - shuffle$ σ es una permutación que cumple $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ y $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$.

13. Si V, W son espacios vectoriales con bases $\{v_i \mid i = 1, \dots, n\}$, $\{w_j \mid j = 1, \dots, m\}$ respectivamente, y $f : V \to W$ un morfismo lineal, se denotan $f_{j_1, \dots, j_d}^{i_1, \dots, i_d}$ los coeficientes matriciales, de $(f \otimes \dots \otimes f) : V^{\otimes d} \to W^{\otimes d}$, es decir,

$$f(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_d}) = \sum_{j_1, \dots, j_d} f_{j_1, \dots, j_d}^{i_1, \dots, i_d} w_{j_1} \otimes \dots \otimes w_{j_d}$$

Calcular $f_{j_1, \dots, j_d}^{i_1, \dots, i_d}$.

14. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$ un endomorfismo. Definir $\det(f)$ sin apelar a ninguna base de V. Probar que si g es otro endomorfismo, $\det(fg) = \det(f)\det(g)$. (Sugerencia: considerar $\Lambda^n V$).

15. Dada una variedad M, definir apropiadamente el fibrado exterior k-esimo $\Lambda_k^*(M)$ y probar que una k-forma C^∞ equivale a una sección a ese fibrado.

16. Probar que una k-forma ω es C^∞ si y sólo si para toda familia $X_1, \dots, X_k,\ X_i \in \mathfrak{X}(M)$, la función $\omega(X_1, \dots, X_k)$ definida por $\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \omega_p(X_1(p), \dots, X_k(p))$ es diferenciable.

17. Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable entre dos variedades. Sea $\alpha \in \Gamma((T^*Y)^{\otimes r})$ un campo de covectores de grado r (es decir, una sección al fibrado $(T^*Y)^{\otimes r}$), al que identificamos, en cada $y \in Y$, con un campo de aplicaciones multilineales $T_yY \times \dots \times T_yY \to \mathbb{R}$.

    Probar que f induce un campo de covectores de grado r, $f^*(\alpha) \in \Gamma((T^*X)^{\otimes r})$, que vía la identificación anterior se define por

$$f^*(\alpha)(x)\big(v_1, \dots, v_r\big) = \alpha(f(x))\big(df(x)(v_1), \cdots, df(x)(v_r)\big).$$

Si (U,ϕ) es una carta de X alrededor de x, (V,ψ) es una carta de Y alrededor de $y=f(x)$, $f(U)\subseteq V$ y α se escribe localmente como

$$\alpha(x)=\sum_{1\leq i_1,\dots,i_r\leq n} a_{i_1,\dots,i_r}(x)d\psi_{i_1}\otimes\cdots\otimes d\psi_{i_r},$$

encontrar las coordenadas de $f^*(\alpha)$ en la base $d\varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes d\varphi_{i_r}$. Probar que si α es un campo de covectores simétricos (resp. antisimétricos), $f^*(\alpha)$ también lo es.

18. Si ω es una k-forma en M, ¿es cierto que $\omega\wedge\omega=0$? ¿Y si $\dim M=3$?

19. Sea X una variedad diferenciable, (U,φ) una carta y $\omega\in\Omega^p(X)$. Calcular $d\omega|_U$ en las coordenadas de (U,φ) para los casos $0\leq p\leq 2$.

20. Sea $\omega\in\Omega^p(X)$. Probar que

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\dots,X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}X_i\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{p+1}) \\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+1}). \end{aligned}$$

21. Sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable ("clásico").

   a) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v):=\langle F(x),v\rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx,dy,dz\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, probar que ω determina un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^1=\omega$.
   b) Demostrar ahora que $\omega_F^2(x)(u,v):=\langle F(x),u\times v\rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Calcular sus coordenadas en la base $\{dx\wedge dy,dz\wedge dx,dy\wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_G^2=\omega$.
   c) Sea $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)=\Omega^0(\mathbb{R}^3)$. Encontrar la relación entre
      1) df y ∇f,
      2) $\nabla\times F$ y $d\omega_F^1$,
      3) $\nabla\cdot F$ y $d\omega_F^2$ (aquí identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3)\simeq C^\infty(\mathbb{R}^3)$ usando la base $dx\wedge dy\wedge dz$).

      Concluir, usando la relación $d\circ d=0$, las fórmulas clásicas $\nabla\times\nabla\equiv 0$ y $\nabla\cdot\nabla\times\equiv 0$.

22. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $\omega\in A_n(V)$ (n-multilineal alternada) tal que $\omega\neq 0$. Probar que $v_1,\dots,v_n$ son linealmente independientes si y sólo si $\omega(v_1,\dots,v_n)\neq 0$. Probar también que, si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de V y $v_j=\sum a_{ij}e_i$, entonces $\omega(v_1,\dots,v_n)=\det(a_{ij})\omega(e_1,\dots,e_n)$.

23. Probar que si M tiene un atlas de la forma $\mathcal{A}=\{(U,x);(V,y)\}$ donde $U\cap V$ es conexo, entonces M es orientable.

24. Ver que toda M paralelizable es orientable.

25. Sea M y N variedades diferenciables. Probar que son equivalentes:

a) M y N son orientables

b) $M \times N$ es orientable

26. Probar que la esfera S^n y $\mathbb{R}^n$ son orientables. Probar que el n-toro T^n y el cilindro son orientables.

27. Sea M una variedad orientable conexa y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Si $\mathcal{A}$ es un atlas orientado compatible con la orientación, probar que para dos cartas $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2)$ el signo de $J(\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1})$ es constante (donde está definida la composición). Interpretar.