Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Siete
Integración y Teorema de Stokes

1. Probar que la integración de formas en una variedad diferenciable orientada M cumple las siguientes propiedades:

   a) Si $-M$ denota la variedad con la orientación opuesta, entonces $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$.
   b) $\int_M a\omega_1 + b\omega_2 = a\int_M \omega_1 + b\int_M \omega_2,\ a, b \in \mathbb{R},\ w_1, w_2\ n-$ formas integrables.
   c) Si ω es una n-forma continua y positiva (es decir $w = g\Omega$, con Ω forma que da orientación y $g \geq 0$ continua), entonces $\int_M \omega \geq 0$ y vale cero si y sólo si $g = 0$.
   d) Si $f : M \to N$ es un difeo y ω es una forma integrable en N, entonces $\int_M f^*\omega = \pm \int_N \omega$, donde el signo depende de si f preserva o invierte orientación.

2. Sea M variedad diferenciable y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que $d\omega = 0$. Probar que

   a) Si S subvariedad de M compacta, sin borde y orientada de dimensión k tal que $S = \partial W$ para alguna subvariedad W de M, entonces $\int_S \omega = 0$.
   b) Si W es subvariedad de dimensión $k+1$ con borde $\partial W = S \sqcup T$ donde S y T son subvariedades de dimensión k orientadas, entonces $\int_S \omega = -\int_T \omega$.

3. Probar que si M es compacta orientable y sin borde de dimensión n y Ω da la orientación de M, entonces $\Omega \neq d\omega$ para toda $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$.

4. Sea $M = \mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\omega(x) = \frac{(-1)^n}{|x|^n} dx_1 \wedge \ldots \hat{dx_i} \wedge \ldots dx_n$. Probar que $d\omega = 0$ pero no existe $\tau \in \Omega^{n-2}(M)$ tal que $d\tau = \omega$.

5. Recordar que en una variedad Riemanniana orientada M, se tiene un elemento de volumen que es la única n-forma Ω que cumple $\Omega_p(v_1, \ldots, v_n) = 1$ para toda base ortonormal orientada de T_pM. En coordenadas locales (U, φ), sabemos que $(\varphi^{-1})^*(\Omega) = \sqrt{g} dx_1 \ldots dx_n$, donde $g = \det(g_{ij})$.

   a) Calcular la matriz (g_{ij}) para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ en coordenadas polares y cilíndricas.
   b) Calcular la matriz (g_{ij}) y el elemento de volumen para $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^2$ y calcular los respectivos volúmenes.

6. Sea C una curva C^1 en una variedad M, parametrizada por $\Gamma : [a, b] \to M$. Si ω es una 1-forma en M, definimos la integral de línea de ω a lo largo de C por $\int_C \omega = \int_{[a,b]} \Gamma^*\omega$. Es decir, si $\Gamma^*\omega = g(t)dt$, se tiene $\int_C \omega = \int_a^b g(t)dt$. La fórmula puede extenderse, desde luego, a toda curva C^1 a trozos.

   a) Probar que la definición no depende de la parametrización elegida. Concretamente, si se tiene $h : [c, d] \to [a, b]$ con $h'(s) > 0$ para todo s, $\int_C \omega = \int_{[c,d]} (\Gamma h)^*\omega$.
   b) Si $\omega = df$ con $f \in \Omega^0(M)$ y la curva C recorre del punto p al punto q, entonces $\int_C \omega = f(q) - f(p)$. En particular, la integral es independiente de la curva elegida entre p y q.