Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Ocho
Cohomología de de Rham

1. Sea $0 \to C^0 \to C^1 \to \ldots \to C^n \to 0$ un complejo (finito) de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Probar que $\sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} C^q = \sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} H^q(C^*)$. Deducir que si el complejo es exacto, entonces $\sum(-1)^q \dim_{\mathbb{R}} C^q = 0$.

2. Calcular la cohomología de de Rham de la esfera $\mathbb{S}^n$.

3. Probar que la esfera $\mathbb{S}^2$ no es difeomorfa al toro utilizando cohomología de de Rham.

4. Calcular la cohomología de de Rham de la variedad que se obtiene quitando r puntos al plano. Idem para la cohomología con soporte compacto.

5. Calcular la cohomología de de Rham y con soporte compacto de la banda de Moebius abierta.

6. Puede $\mathbb{R}^2$ escribirse como unión de dos abiertos conexos U y V tales que su intersección no sea conexa ?

7. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Probar que si U puede ser cubierto con finitos abiertos convexos, entonces su cohomología es un espacio vectorial de dimensión finita.

8. Sean p, q dos puntos distintos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que un cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ separa a p de q si esos dos puntos pertencen a componentes conexas distintas de $\mathbb{R}^n - A$. Dados dos cerrados disjuntos A y B y dos puntos distintos p, q de $\mathbb{R}^n - (A \cup B)$, probar que si ni A ni B separan a los puntos, entonces tampoco los separa $A \cup B$.

9. Probar que $\mathbb{R}^n$ no contiene un subespacio homeomorfo a D^m para $m > n$.

10. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados con $A, B \neq \mathbb{R}^n$. Probar que si A y B son homeomorfos, entonces $H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - A) \simeq H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - B)$. Deducir que para todo A, B cerrados de $\mathbb{R}^n$ homeomorfos (incluso para A o B igual a $\mathbb{R}^n$), $\mathbb{R}^n - A$ y $\mathbb{R}^n - B$ tienen la misma cantidad de componentes conexas.

11. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio homeomorfo a S^k (para $1 \leq k \leq n-2$). Probar que

$$H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - A) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0, n-k-1, n-1 \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

12. Sea M una variedad compacta orientada conexa y sin borde de dimensión n. Probar que la integración en M induce un isomorfismo $H^n_{dR}(M) \simeq \mathbb{R}$.