Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre 2008
Práctica Nueve
Dualidad de Poincaré, Grado de funciones y Característica de Euler

Nota: En esta práctica todas las variedades se suponen sin borde al menos que se especifique lo contrario.

1. Probar que si M es orientable, conexa y no compacta de dimensión n, entonces $H^n(M) = 0$.

2. Sea M variedad compacta, orientable de dimensión $n = 2m$ con m impar. Probar que $H^m(M)$ tiene dimensión par. Deducir que la característica de Euler $\chi(M)$ es par.

3. Probar que si M es compacta orientable de dimensión impar entonces $\chi(M) = 0$.

4. Sean $U, V \subset M$ abiertos tales que U, V y $U \cap V$ son de tipo finito. Entonces $U \cup V$ es de tipo finito y $\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$.

5. Sea $W \subset \mathbb{C}$ una región compacta con borde suave y $p \in \mathbb{C}[X]$ polinomio no constante que no tiene raíces en ∂W. Probar que la cantidad de ceros de p en W contados con multiplicidad coincide con el grado de $p/|p| : \partial W \to \mathbb{S}^1$.

6. a) Calcular el grado de la función antípoda $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $\varphi(x) = -x$.
   b) Probar que la antípoda es homotópica a la identidad si y sólo si n es impar.
   c) Probar que existe un campo vectorial nunca nulo en $\mathbb{S}^n$ si y sólo si n es impar.

7. Recordar que dada $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\cos t, \sin t) = (\cos g(t), \sin g(t))$. En ese caso, se tiene que $g(t + 2\pi) = g(t) + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Probar que $deg(f) = k$.

8. Sean $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Probar que f y g son homotópicas si y sólo si tienen el mismo grado.

9. Probar que una función diferenciable $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ se puede extender suavemente al disco D^2 si y sólo si $deg(f) = 0$.

10. Sean J y K dos subvariedades disjuntas compactas orientadas y conexas de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensiones $d \geq 1$ y $l \geq 1$ respectivamente y tales que $d + l = n$. Se define el *linking number* como el entero $lk(J, K) = deg(\phi)$, donde $\phi : J \times K \to \mathbb{S}^n$ es la función $\phi(x, y) = \frac{y-x}{||y-x||}$. La orientación en $J \times K$ es la orientación producto (heredada de J y K) y la de $\mathbb{S}^n$ es la estándar (como borde de D^{n+1}). Notar que $lk(J, K)$ cambia de signo si cambiamos la orientación de J o de K. Probar que
    a) $lk(K, J) = (-1)^{(d+1)(l+1)} lk(J, K)$.
    b) Si J y K pueden separarse por un hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ entonces $lk(J, K) = 0$.
    c) Sean G y H homotopías entre las inclusiones $G_0 : J \to \mathbb{R}^{n+1}$ y $H_0 : K \to \mathbb{R}^{n+1}$ y embeddings G_1 y H_1 tales que para todo instante de tiempo t se tiene que $G_t(J) \cap H_t(K) = \emptyset$. Entonces $lk(J, K) = lk(G_1(J), H_1(K))$.

d) Sea X variedad compacta orientada de dimensión $l+1$ con borde ∂X y sean $X_1, \ldots, X_k$ las componentes conexas del borde. Sea $F : X \to \mathbb{R}^{n+1} - J$ diferenciable tal que $F|_{X_i}$ es un embedding para todo i. Sea $K_i = F(X_i)$. Probar que $\sum_{i=1}^{k} lk(J, K_i) = 0$.