Geometría Proyectiva

Primer Cuatrimestre 2004

Cónicas y cuádricas

1. Para cada una de las siguientes cónicas encuentre su forma afín (tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$), su forma ortogonal, sus centros, sus puntos singulares, y grafique en el sistema original de coordenadas (¡esto sólo en $\mathbb{R}^2$!).

   a) $\{x^2 + y^2 = 1\}$.
   b) $\{x^2 + y^2 + 2x - 2y = -1\}$.
   c) $\{xy - x + 3y = 2\}$.
   d) $\{x^2 - y^2 + 4x - 2y = 4\}$.
   e) $\{2x^2 + xy - y^2 = 0\}$.
   f) $\{x^2 + y^2 - 2x + 4y = -5\}$.

2. Para cada una de las siguientes cónicas encuentre su forma afín (tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$), su forma ortogonal, sus centros, sus puntos singulares. Si todavía está con ánimo grafique.

   a) $\{4x^2+4y^2+4z^2+2xy+2xz+2yz+6x-6z+5 = 0\}$.
   b) $\{4x^2+4y^2+4z^2+2xy+2xz+2yz+6x-6z+6 = 0\}$.
   c) $\{-4x^2 + 2yz - 8x + 2y - 4 = 0\}$.
   d) $\{-4x^2 + 2yz - 8x + 2y - 5 = 0\}$.
   e) $\{-4x^2 + 2yz - 8x + 2y - 3 = 0\}$.
   f) $\{16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25z^2 - 16x - 20y = 0\}$.
   g) $\{16x^2 + 24xy + 9y^2 - 25z^2 - 16x - 20y = 0\}$.
   h) $\{16x^2 + 24xy + 9y^2 - 25z^2 - 16x - 12y = 0\}$.

3. Demostrar que las secciones planas de un cono (intersección del cono con distintos planos) en $\mathbb{R}^3$ son cónicas. Interpretar la clasificación de las cónicas en términos de la posición del plano utilizado para la sección.

4. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ y un número real a tal que $2a > d(p, q)$, definimos
$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) + d(x, q) = 2a\}$$
   con $d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.
   a) Demostrar que $\mathcal{X}$ es una elipse.
   b) Los puntos p y q son llamados **focos**. Ver que el punto medio entre los focos es el centro de la elipse.
   c) Toda elipse puede obtenerse por esta construcción.

5. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ y un número real a tal que $0 < 2a < d(p, q)$, definimos
$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) - d(x, q) = |2a|\}$$
   con d igual al ejercicio 4. Probar que $\mathcal{X}$ es una hipérbola y que toda hipérbola se puede obtener de esta forma.

6. Mostrar que dada una elipse que refleje como un espejo los rayos de luz en el plano, los rayos emitidos desde un foco pasan, luego de reflejarse, por el otro foco.

7. Para $p \in \mathbb{R}^2$ y $L \subset \mathbb{R}^2$ una recta que no contiene a p, sea
$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) = d(x, L)\}.$$
   a) Probar que $\mathcal{X}$ es una parábola.
   b) Toda parábola se obtiene de esta forma.
   c) El punto p es el **foco** de la parábola y la recta L es su **eje**. Una parábola que refleja la luz concentra los rayos de dirección perpendicular a su eje y provenientes del semiespacio que contiene al foco en este punto.

8. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la cónica de ecuación cuadrática $F = 0$ y $p \in \mathbb{R}^2 - C$. Hallar los puntos $x \in C$ tales que la recta tangente a C en x pasa por p.

9. Demostrar que por cada punto del hiperboloide de una hoja
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$
   pasan dos rectas contenidas en él.
   Optativo: ¿Qué rectas (o variedades lineales) contienen las otras cuádricas ?