Geometría Proyectiva

Primer Cuatrimestre 2004

Práctica 1

1. Sea R un dominio.
   a) Si F, G son formas de grados r, s respectivamente, en $R[X_1, \ldots, X_n]$, probar que FG es una forma de grado $r + s$.
   b) Probar que un factor de una forma en $R[X_1, \ldots, X_n]$ es también una forma.

2. Sea R un DFU, K el cuerpo de fracciones de R. Probar que cada elemento z de K puede escribirse en la forma $z = a/b$, donde $a, b \in R$ no tienen divisores comunes; esta representación es única salvo elementos unitarios de R.

3. Sea R un DIP. Sea P un ideal primo de R, propio y distinto de cero.
   a) Probar que P está generado por un elemento irreducible.
   b) Probar que P es maximal.

4. Sea k un cuerpo infinito, $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Supongamos que $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in k$. Probar que $F = 0$. (Sugerencia: Escribir $F = \sum F_i X_n^i$, $F_i \in k[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Usar inducción en n y el hecho que $F(a_1, \ldots, a_{n-1}, X_n)$ tiene finitas raíces si algún $F_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq 0$.)

5. Sea k un cuerpo. Probar que hay un número infinito de polinomios mónicos irreducibles en $k[X]$. (Sugerencia: Si $F_1, \ldots, F_n$ son todos ellos, descomponer en factores irreducibles $F_1 \cdot \cdots \cdot F_n + 1$.)

6. Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito. (Sugerencia: Los polinomios mónicos irreducibles son $X - a$, $a \in k$.)

7. Sea k un cuerpo, $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $a_1, \ldots, a_n \in k$.
   a) Probar que $F = \sum \lambda_{(i)} (X_1 - a_1)^{i_1} \ldots (X_n - a_n)^{i_n}$, $\lambda_{(i)} \in k$.
   b) Si $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$, probar que $F = \sum_{i=1}^n (X_i - a_i) G_i$, con $G_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ (no necesariamente únicos).

8. Probar que los subconjuntos algebraicos de $A^1(k)$ son precisamente los subconjuntos finitos, juntamente con el mismo $A^1(k)$.

9. Si k es un cuerpo finito, probar que cada subconjunto de $A^n(k)$ es algebraico.

10. Dar un ejemplo de una colección numerable de conjuntos algebraicos cuya unión no sea algebraica.

11. *a*) Probar que $\{(t, t^2, t^3) \in A^3(k) : t \in k\}$ es un conjunto algebraico.
    b) Probar que $\{(\cos(t), \mathrm{sen}(t)) \in A^2(k) : t \in \mathbb{R}\}$ es un conjunto algebraico.
    c) Probar que el conjunto de puntos en $A^2(\mathbb{R})$ cuyas coordenadas polares (r, θ) satisfacen la ecuación $r = \mathrm{sen}(\theta)$ es un conjunto algebraico.

12. Graficar las curvas en $A^2(\mathbb{R})$ dadas por la ecuación $F(X, Y) = 0$,
    a) $F = Y - X^2$
    b) $F = Y - X^3 + X$
    c) $F = Y^2 - X^3$
    d) $F = Y^2 - X^3 - X^2$
    e) $F = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
    f) $F = (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$
    g) $F = X^2 + X^3 + Y^2$
    h) $F = 2X^4 - 3X^2Y + Y^2 - 2Y^3 + Y^4$
    i) $F = X^4 + X^2Y^2 - 2X^2Y - XY^2 + Y^2$
    j) $F = X^6 - X^2Y^3 - Y^5$

13. Supongamos que C es una curva afín plana y L es una recta en $A^2(k)$, $L \not\subset C$. Supongamos que $C = V(F)$, $F \in k[X,Y]$ un polinomio de grado n. Probar que $L \cap C$ es un conjunto finito con a lo sumo n puntos. (Sugerencia: Suponer $L = V(Y - (aX + b))$ y considerar $F(X, ax + b) \in k[X]$.)

14. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos no es algebraico.
    a) $\{(x,y) \in A^2(\mathbb{R}) : \ y = \operatorname{sen}(x)\}$.
    b) $\{(z,w) \in A^2(\mathbb{C}) : \ |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.
    c) $\{(\cos(t), \operatorname{sen}(t), t) \in A^3(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$.

15. Sea F un polinomio no constante en $k[X_1,\ldots,X_n]$, k algebraicamente cerrado. Probar que $A^n(k) \setminus V(F)$ es infinito si $n \geq 1$ y $V(F)$ es infinito si $n \geq 2$. Deducir que el complemento de un conjunto algebraico es infinito. (Sugerencia: Ver el problema 4.)

16. Sean $V \subset A^n(k)$, $W \subset A^m(k)$ conjuntos algebraicos. Probar que $V \times W = \{(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_m) : (a_1,\ldots,a_n) \in V,\ (b_1,\ldots,b_m) \in W\}$ es un conjunto algebraico en $A^{n+m}(k)$. Se denomina producto de V y W.

17. Sean V, W conjuntos algebraicos de $A^n(k)$. Probar que $V = W$ si y sólo si $I(V) = I(W)$.

18. *a*) Sea V un conjunto algebraico de $A^n(k)$, y $P \in A^n(k)$ un punto que no pertenezca a V. Probar que existe un polinomio $F \in k[X_1,\ldots,X_n]$ tal que $F(Q) = 0$ para todo $Q \in V$, y $F(P) = 1$. (Sugerencia: $I(V) \neq I(V \cup \{P\})$.)
    b) Sea $\{P_1,\ldots,P_r\}$ un conjunto finito de puntos de $A^n(k)$. Probar que existen polinomios $F_1,\ldots,F_r \in k[X_1,\ldots,X_n]$ tales que $F_i(P_j) = \delta_{ij}$.
    c) Sea V un conjunto algebraico de $A^n(k)$, $P_1, P_2 \notin V$. Probar que existe un polinomio $F \in k[X_1,\ldots,X_n]$ tal que $F(P_i) \neq 0$, $i = 1,2$, pero $F \in I(V)$. (Sugerencia: Buscar $F_i \in I(V)$ tal que $F_i(P_i) \neq 0$. Entonces $F = F_1$ o F_2 o $F_1 + F_2$.)

19. Sea I un ideal de un anillo R. Si $a^n \in I, b^m \in I$, probar que $(a+b)^{n+m} \in I$. Probar que $\operatorname{Rad}(I)$ es un ideal, de hecho un ideal radical. Probar que todo ideal radical es primo.

20. Probar que $I = (X^2 + 1) \subset \mathbb{R}[X]$ es un ideal radical (incluso primo), pero I no es el ideal de ningún conjunto de $A^1(\mathbb{R})$.

21. Probar que para cualquier ideal I de $k[X_1,\ldots,X_n]$, $V(I) = V(\operatorname{Rad}(I))$, y $\operatorname{Rad}(I) \subset I(V(I))$.

22. Probar que $I = (X_1 - a_1,\ldots,X_n - a_n) \subset k[X_1,\ldots,X_n]$ es un ideal maximal y que el homomorfismo natural de k en $k[X_1,\ldots,X_n]/I$ es un isomorfismo.