Geometría Proyectiva

Primer Cuatrimestre 2004

Práctica 2

1. Sea I un ideal de un anillo R, $\pi : R \to R/I$ el homomorfismo natural.
   a) Probar que para todo ideal J' de R/I, $\pi^{-1}(J') = J$ es un ideal de R que contiene a I, y que para cada ideal J de R que contenga a I, $\pi(J) = J'$ es un ideal de R/I. Esto establece una correspondencia natural uno a uno entre $\{$ideales de $R/I\}$ e $\{$ideales de R que contienen a $I\}$
   b) Probar que J' es un ideal radical si y sólo si J es un ideal radical. Análogamante para ideales primos y radicales.
   c) Probar que J' es de generación finita si J lo es. Concluir que R/I es noetheriano si R es noetheriano. Todo anillo de la forma $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ es noetheriano.
2. Probar que cada ideal propio de un anillo noetheriano está contenido en un ideal maximal.
3. *a*) Probar que $V(Y - X^2) \subset A^2(\mathbb{C})$ es irreducible; y de hecho $I(V(Y - X^2)) = (Y - X^2)$.
   b) Descomponer $V(Y^4 - X^2, Y^4 - X^2Y^2 + XY^2 - X^3) \subset A^2(\mathbb{C})$ en componentes irreducibles.
4. Probar que $F = Y^2 + X^2(X - 1)^2 \in \mathbb{R}[X, Y]$ es un polinomio irreducible, pero que $V(F)$ es reducible.
5. Sean V, W conjuntos algebraicos en $A^n(k)$, $V \subset W$. Probar que cada componente irreducible de V está contenida en alguna componente irreducible de W.
6. Si $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ es la descomposición de un conjunto algebraico en componentes irreducibles, probar que $V_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} V_j$.
7. Si k es infinito, probar que $A^n(k)$ es irreducible.
8. *a*) Sea k algebraicamente cerrado. Probar que si $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ es irreducible, entonces $I(V(F)) = (F)$.
   b) Sea k algebraicamente cerrado, y $F, G \in k[X_1, \ldots, X_n]$ irreducibles. Probar que $V(F) \subset V(G)$ si y sólo si F/G. En particular, $V(F) = V(G)$ si y sólo si $F = \lambda G$, $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$.
   c) Exhibir contraejemplos en el caso en que k no es algebraicamente cerrado.
9. Sea $k = \mathbb{R}$.
   a) Probar que $I(V(X^2 + Y^2 + 1)) = (1)$.
   b) Probar que cada subconjunto algebraico de $A^2(\mathbb{R})$ es igual a $V(F)$ para algún $F \in \mathbb{R}[X, Y]$.
   Ello muestra por qué se necesita, generalmente, que k sea algebraicamente cerrado.
10. *a*) Buscar las componentes irreducibles de $V(Y^2 - XY - X^2Y + X^3)$ en $A^2(\mathbb{R})$, y también en $A^2(\mathbb{C})$.
    b) Lo mismo para $V(Y^2 - X(X^2 - 1))$ y para $V(X^3 + X - X^2Y - Y)$.
11. *a*) Descomponer $V(X^2 + Y^2 - 1, X^2 - Z^2 - 1) \subset A^3(\mathbb{C})$ en componentes irreducibles.
    b) Sea $V = \{(t, t^2, t^3) \in A^3(\mathbb{C}) : \ t \in \mathbb{C}\}$. Buscar $I(V)$ y probar que V es irreducible.
12. Sea R un DFU.
    a) Probar que un polinomio mónico de grado dos o tres en $R[X]$ es irreducible si y sólo si no posee raíz en R.
    b) $X^2 - a \in R[X]$ es irreducible si y sólo si a no es un cuadrado de R.
13. Probar que $V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subset A^2(k)$ es una curva irreducible para todo cuerpo k algebraicamente cerrado y todo $\lambda \in k$.
14. Exhibir para cada $d > 0$ un polinomio irreducible $F_d \in K[X, Y]$ de grado d. (Sugerencia: Usar el criterio de Eisenstein.)
15. Sea $I = (Y^2 - X^2, Y^2 + X^2) \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Buscar $V(I)$ y $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X, Y]/I)$.

16. Sea k un cuerpo, $F \in K[X]$ un polinomio de grado $n > 0$. Probar que los residuos $\overline{1}, \overline{X}, \ldots, \overline{X}^{n-1}$ forman una base de $k[X]/(F)$ sobre k.

17. Sea $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, k algebraicamente cerrado, $V = V(I)$. Probar que existe una correspondencia natural uno a uno entre los subconjuntos algebraicos de V y los ideales radicales de $k[X_1, \ldots, X_n]/I$, y que a conjuntos algebraicos irreducibles (resp. puntos) corresponden ideales primos (ideales maximales). (Ver problema 1)

18. *a*) Sea R un DFU, y sea $P = (t)$ un ideal propio, principal , primo. Probar que no existe ningún ideal primo Q tal que $0 \subset Q \subset P$, $Q \neq 0$, $Q \neq P$.

    b) Sea $V = V(F)$ una hipersuperficie irreducible en $A^n(k)$. Probar que no existe ningún conjunto algebraico irreducible W tal que $V \subset W \subset A^n(k)$, $W \neq V$, $W \neq A^n(k)$.

19. Sea $I = (X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3) \subset k[X, Y, Z]$. Definimos $\alpha : k[X, Y, Z] \to k[T]$ por $\alpha(X) = T^9$, $\alpha(Y) = T^6$, $\alpha(Z) = T^4$.

    a) Probar que cada elemento de $k[X, Y, Z]/I$ es el residuo de un elemento $A + XB + YC + XYD$, para ciertos $A, B, C, D \in k[z]$.

    b) Si $F = A + XB + YC + XYD$, $A, B, C, D \in k[z]$, y $\alpha(F) = 0$, comparar las potencias semejantes de T para concluir que $F = 0$.

    c) Probar que $\ker(\alpha) = I$, así como I es primo, $V(I)$ es irreducible y $I(V(I)) = I$.