Geometría Proyectiva

Primer Cuatrimestre 2004

Práctica 3

Nota: En esta práctica k denota a un cuerpo algebraicamente cerrado. Usaremos además el nombre *variedad afín* o *variedad* para denotar a un conjunto algebraico irreducible.

1. Sea $V \subset A^n$ un conjunto algebraico. Probar que la aplicación que a cada $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ le hace corresponder una función polínomica de $A(V, k)$ es un homomorfismo de anillos cuyo núcleo es $I(V)$.

2. Sea $V \subset A^n$ una variedad. Una *subvariedad* de V es una variedad $W \subset A^n$ que está contenida en V. Probar que existe una correspondencia uno a uno entre los subconjuntos algebraicos (sean subvariedades o puntos) de V y los ideales radicales (respectivamente ideales primos o ideales maximales) de $\Gamma(V)$ (ver problemas 1 y 17 de la práctica 2).

3. Sea W una subvariedad de una variedad V, y sea $I_V(W)$ el ideal de $\Gamma(V)$ correspondiente a W.
   a) Probar que cada función polinómica sobre V se restringe a una función polinómica sobre W.
   b) Probar que la aplicación de $\Gamma(V)$ en $\Gamma(W)$ definida en el item anterior es un homomorfismo de núcleo $I_V(W)$, por lo tanto, $\Gamma(W)$ es isomorfo a $\Gamma(V)/I_V(W)$.

4. Sea $V \subset A^n$ una variedad. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes: (i) V es un punto; (ii) $\Gamma(V) = k$; (iii) $\dim_k \Gamma(V) < \infty$.

5. Sea F un polinomio irreducible de $k[X, Y]$, y supongamos que F es mónico en Y: $F = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X)$. Sea $V = V(F) \subset A^2$. Pobar que el homomorfismo natural de $k[X]$ en $\Gamma(V) = k[X, Y]/(F)$ es uno a uno, por lo que $k[X]$ puede considerarse como un subanillo de $\Gamma(V)$; probar que las clases residuales $\overline{1}, \overline{Y}, \ldots, \overline{Y}^{n-1}$ generan $\Gamma(V)$ sobre $k[X]$ como un módulo. Es más, probar que son linealmente independientes, por lo que se tiene un módulo libre.

6. *Definición:* Sea $\varphi : V \to W$ una función polínomica entre conjuntos algebraicos. Definimos $\widetilde{\varphi} : A(W, k) \to A(V, k)$ como $\widetilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$. Como $\widetilde{\varphi}(\Gamma(W)) \subset \Gamma(V)$, también vamos a notar con $\widetilde{\varphi}$ a la restricción $\widetilde{\varphi}|_{\Gamma(W)} : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$.
   Sean $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to Z$. Probar que $\widetilde{\psi \circ \varphi} = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}$. Probar que la composición de aplicaciones polinómicas es una aplicación polinómica.

7. Si $\varphi : V \to W$ es una aplicación polinómica, y X es un subconjunto algebraico de W, probar que $\varphi^{-1}(X)$ es un conjunto algebraico de V. Si $\varphi^{-1}(X)$ es irreducible, probar que X es irreducible. Esto nos proporciona un método útil para determinar la irreducibilidad de los conjuntos algebraicos.

8. *a*) Probar que $\{(t, t^2, t^3) \in A^3(k) : \ t \in k\}$ es una variedad afín.
   b) Probar que $V(XZ - Y^2, YZ - X^3, Z^2 - X^2Y) \subset A^3(\mathbb{C})$ es una variedad. (Sugerencia: $Y^3 - X^4, Z^3 - X^5, Z^4 - Y^5 \in I(V)$. Buscar una aplicación polinómica de $A^1(\mathbb{C})$ sobre V.)

9. Sea $\varphi : V \to W$ una aplicación polinómica entre variedades afines, $V' \subset V$, $W' \subset W$ subvariedades. Supongamos que $\varphi(V') \subset W'$.
   a) Probar que $\widetilde{\varphi}(I_W(W')) \subset I_V(V')$ (ver el problema 3).
   b) Probar que la restricción de φ es una aplicación polinómica de V' en W'.

10. Probar que la *proyección canónica* $p : A^n \to A^r$, $n \geq r$ definida por $p(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_r)$ es una aplicación polinómica.

11. Sea $f \in \Gamma(V)$, $V \subset A^n$ una variedad. Definimos el *grafo* de f por $G(f) = \{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in A^{n+1} : (a_1, \ldots, a_n) \in V, \ a_{n+1} = f(a_1, \ldots, a_n)\}$. Probar que $G(f)$ es una variedad afín, y que la aplicación $(a_1, \ldots, a_n) \to (a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n))$ define un isomorfismo entre V y $G(f)$. (La proyección es la inversa.)

12. *a*) Sea $\varphi : A^1 \to V = V(Y^2 - X^3) \subset A^2$ definida por $\varphi(t) = (t^2, t^3)$. Probar que, a pesar de ser φ una aplicación polinómica inyectiva y suryectiva, φ no es un isomorfismo. (Sugerencia: $\widetilde{\varphi}(\Gamma(V)) = k[T^2, T^3] \subset k[T] = \Gamma(A^1)$.)

b) Sea $\varphi : A^1 \to V = V(Y^2 - X^2(X+1))$ definida por $\varphi(t) = (t^2-1, t(t^2-1))$. Probar que φ es inyectiva y suryectiva, excepto $\varphi(\pm 1) = (0,0)$.

13. Sea $V = V(X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3) \subset A^3$ como en el problema 19 de la práctica 2, $\overline{\alpha} : \Gamma(V) \to k[T]$ inducido por el homomorfismo α de aquel problema.
   a) ¿Cuál es la aplicación polinómica $f : A^1 \to V$ tal que $\widetilde{f} = \overline{\alpha}$?
   b) Probar que f es inyectiva y suryectiva, pero no es isomorfismo.

14. Un conjunto $V \subset A^n(k)$ se denomina *subvariedad lineal* de $A^n(k)$ si $V = V(F_1, \ldots, F_r)$ para ciertos polinomios F_i de grado 1.
   a) Probar que si T es un cambio de coordenadas afín en $A^n(k)$, entonces V^T es una subvariedad lineal de $A^n(k)$.
   b) Si $V \neq \emptyset$, probar que existe un cambio de coordenadas afín T en $A^n(k)$ tal que $V^T = V(X_{m+1}, \ldots, X_n)$. (Sugerencia: usar inducción en r.) Luego V es una variedad.
   c) Probar que el m que aparece en el item anterior es independiente de la elección de T. Se denomina la dimensión de V. V es entonces isomorfa (como variedad) a $A^m(k)$.
   (Sugerencia: suponer que existe un cambio de coordenadas afín T tal que $V(X_{m+1}, \ldots, X_n)^T = V(X_{s+1}, \ldots, X_n)$, $m < s$; probar que entonces $T_{m+1}, \ldots, T_n$ serían dependientes.)

15. Sean $P = (a_1, \ldots, a_n)$ y $Q = (b_1, \ldots, b_n)$ dos puntos distintos de $A^n(k)$. La *recta* determinada por P y Q se define por $\{a_1 + t(b_1 - a_1), \ldots, a_n + t(b_n - a_n) : \ t \in k\}$.
   a) Probar que si L es la recta determinada por P y Q, y T es un cambio de coordenadas afín, entonces $T(L)$ es la recta determinada por $T(P)$ y $T(Q)$.
   b) Probar que una recta es una subvariedad lineal de dimensión 1, y que una subvariedad lineal de dimensión 1 es la recta determinada por dos cualesquiera de sus puntos.
   c) Probar que, en $A^2(k)$, la recta es un hiperplano.
   d) Sean $P, P' \in A^2(k)$ y L_1, L_2 dos rectas distintas que pasan por P, L'_1, L'_2 dos rectas distintas que pasan por P'. Probar que existe un cambio de coordenadas afín T de $A^2(k)$ tal que $T(P) = P'$ y $T(L_i) = L'_i$, $i = 1, 2$.

16. Sea $k = \mathbb{C}$. Consideremos en $A^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ la métrica usual (obtenida identificando a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, y por lo tanto a $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$). Recordar que un espacio métrico X es arco-conexo si para todo par de puntos $P, Q \in X$, existe una función continua $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$.
   a) Probar que $\mathbb{C} \setminus S$ es arco-conexo para todo conjunto finito S.
   b) Sea V un conjunto algebraico de $A^n(\mathbb{C})$. Probar que $A^n(\mathbb{C}) \setminus V$ es arco-conexo. (Sugerencia: si $P, Q \in A^n(\mathbb{C}) \setminus V$, sea L la recta que une P y Q. $L \cap V$ es finito y L es isomorfo a $A^1(\mathbb{C})$.)