Geometría Proyectiva

PRIMER CUATRIMESTRE 2004

PRÁCTICA 4

1. Sean las siguientes curvas planas:

   a) $Y^2 - X^3$

   b) $Y^2 - X^3 - X^2$

   c) $(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$

   d) $(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$

   Probar que $P(0,0)$ es el único punto múltiple de ellas.

2. Buscar los puntos múltiples, y las rectas tangentes en los puntos múltiples, de cada una de las siguientes curvas

   a) $Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY$

   b) $X^4 + Y^4 - X^2Y^2$

   c) $X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$

   d) $Y^2 + (X^2 - 5)(4X^4 - 20X^2 + 25)$

   Dibujar la parte de curva del item d) que está contenida en $A^2(\mathbb{R})$.

3. Si una curva de grado n tiene un punto P de multiplicidad n, probar que F consta de n rectas que pasan por P (no necesariamente distintas).

4. Sea P un punto doble de una curva F. Probar que P es un nodo si y sólo si $F_{XX}(P)^2 \neq F_{XX}(P)F_{YY}(P)$.

5. (Se supone que la característica de k es cero.) Probar que $m_P(F)$ es el menor entero m tal que para ciertos $i + j = m$, $\frac{\partial^m F}{\partial X^i \partial X^j}(P) \neq 0$.

6. *a*) Sean $F, G \in k[X_1, \ldots, X_n]$ formas de grados r, $r+1$ respectivamente, sin factores comunes. Probar que $F + G$ es irreducible.

   b) Se pueden construir curvas irreducibles con rectas tangentes dadas de antemano L_i de multiplicidad r_i, de la siguiente manera: si $\sum r_i = m$, sea $F = \prod L_i^{r_i} + F_{m+1}$, donde F_{m+1} se elige de manera que F sea irreducible.

7. *a*) Probar que la parte real de la curva c) del ejercicio 1. está formada por el conjunto de puntos de $A^2(\mathbb{R})$ cuyas coordenadas polares (r, θ) satisfacen la ecuación $r = -\operatorname{sen}(3\theta)$. Buscar las ecuaciones polares de la parte real de la curva d) del mismo ejercicio.

   b) Si n es un entero impar positivo, probar que la ecuación $r = \operatorname{sen}(n\theta)$ define la parte real de una curva de grado $n + 1$ con un punto ordinario de orden n en $(0,0)$.
   (Usar el siguiente resultado: $\operatorname{sen}(n\theta)$ = parte imaginaria de $e^{in\theta}$, para construir la ecuación; nótese que un giro de π/n es una transformación lineal que aplica la curva en si misma.)

   c) Analizar las singularidades que surgen al considerar $r^2 = \operatorname{sen}^2(n\theta)$, con n par.

   d) Probar que las curvas construidas en b) y c) son ambas irreducibles en $A^2(\mathbb{C})$.
   (Sugerencia: homogeneizar los polinomios, probar que estos son irreducibles y deducir la irreducibilidad de los originales.)

8. Sea $T : A^2 \to A^2$ una aplicación polinómica, $T(Q) = P$.

   a) Probar que $m_Q(F^T) = m_P(F)$.

   b) Sea $T = (T_1, T_2)$ y definamos $J_Q T = (T_{i X_j}(Q))$ como la matriz jacobiana de T en Q. Probar que $m_Q(F^T) = m_P(F)$ si $J_Q T$ es inversible.

   c) Probar que el recíproco de b) es falso: sea $T = (X^2, Y)$, $F = Y - X^2$, $P = Q = (0,0)$.

9. Sea $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ y $V(F) \subset A^n$ la hipersuperficie que define. Sea $P \in A^n$.

   a) Definir la multiplicidad $m_P(F)$ de F en P.

   b) Si $m_P(F) = 1$, definir el hiperplano tangente a F en P.

   c) Examinar $F = X^2 + Y^2 - Z^2$, $P = (0,0)$. ¿Es posible definir los hiperplanos tangentes en los puntos múltiples?

10. Probar que una curva plana irreducible posee solamente un número finito de puntos múltiples. ¿Es esto cierto para hipersuperficies en A^n, $n \geq 3$?

11. Sea $V \subset A^n$ una variedad afín, $P \in V$. El espacio tangente $T_P(V)$ se define por

$$T_P(V) = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in A^n : \text{ para todo } G \in I(V), \ \sum_{i=1}^{n} G_{X_i}(P) a_i = 0 \right\}.$$

a) Si $V = V(F)$ es una hipersuperficie y F es irreducible, probar que $T_P(V) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : \sum F_{X_i}(P) a_i = 0\}$.

b) Con las mismas hipótesis que en a), ¿cómo se relaciona la dimensión de $T_P(V)$ con la multiplicidad de F en P?

12. Sea A un anillo, y $F, G \in A[X]$. Probar que existen $P, Q \in A[X]$ tales que la resultante $R(F,G)$ se escribe $R(F,G) = PF + QG$.

13. Sea k un cuerpo con $k = \overline{k}$ y sea $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ irreducible. Probar (sin usar el Teorema de los ceros de Hilbert) que si $G \in k[X_1, \ldots, X_n]$ y $V(F) \subset V(G)$ entonces F/G.
(Sugerencia: Usar la resultante.)

14. Sean $F, G \in k[X]$ mónicos, con k un cuerpo algebraicamente cerrado, de manera que

$$F = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \quad G = \prod_{j=1}^{m} (X - \beta_j).$$

Probar que

$$R(F,G) = \lambda \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j), \ \lambda \neq 0, \ \lambda \in k.$$

15. Sean $F, G \in A[X]$, y sea $\varphi : A[X]/(G) \to A[X]/(G)$, definido por $\varphi(\overline{H}) = \overline{FH}$. Probar que $\det(\varphi) = R(F,G)$.

16. Calcular las direcciones asintóticas y asíntotas (si existen) de las curvas algebraicas definidas por los siguientes polinomios:

a) $X^2 - Y^2 - 1$

b) $X^2 + Y^2 - 1$

c) $Y - X^2$

d) $Y^2 - X^2 + X^3$

e) $Y^2 - X^3 + X$

f) $X^n + Y^n - 1$

g) $X^n - Y^m$

h) $Y^2 - G(X)$, donde $G \in k[X]$ tiene grado n

17. Sea $F \in k[X,Y]$ de grado n. Denotemos $N \leq n$ el grado de F con respecto a la variable Y, de modo que $F = \sum_{i=0}^{N} a_i(X) Y^i$ con $a_i \in k[X]$ y $a_N \neq 0$. Determinar cuáles son las implicaciones verdaderas entre las siguientes proposiciones:

a) $N < n$

b) $F_n(0,1) = 0$ (o sea, la direccion $(u,v) = (0,1)$ (dirección vertical) es asintótica para F)

c) F no contiene el monomio Y^n

d) F tiene una recta asintótica vertical

e) a_N no es constante.

18. Sea $F \in k[X,Y]$ de grado n. Demostrar que existe una matriz inversible $A \in k^{2\times 2}$ tal que $G(X,Y) = F((X,Y) \cdot A)$ contiene el monomio Y^n. Demostrar que entonces el anillo de coordenadas de $V(G)$ es una extensión entera de $k[X]$.

19. Sea k el cuerpo de los reales o de los complejos. Proponer una definición métrica de dirección asintótica y de asíntota (o sea, en términos de distancia entre puntos de la curva y de la recta). Demostrar la equivalencia con la definición dada en clase.