Geometría Proyectiva

Primer Cuatrimestre 2004

Práctica 5

Notación:

- Si V es una variedad $k(V)$ denotará el cuerpo de las funciones racionales de V.
- Si V es una variedad y $P \in V$, $\mathcal{O}_P(V)$ denotará el anillo local de V en P y $M_P(V)$ a su ideal maximal.
- Si $V = V(F) \subset A^2$, notaremos a $\mathcal{O}_P(V)$ con $\mathcal{O}_P(F)$ y con $M_P(F)$ a su ideal maximal.
- Si P es un punto simple de una curva F notaremos con ord_P^F a la función de orden inducida por el anillo de valoración discreta $\mathcal{O}_P(F)$.
- Si F y G son curvas y $P \in A^2$, notaremos con $I(P, F \cap G)$ al número de intersección de F y G en P.

1. Sea $\varphi : V \to W$ una aplicación polínomica entre variedades afines, $\widetilde{\varphi} : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ la aplicación inducida entre los anillos de coordenadas. Supongamos que $P \in V$, $\varphi(P) = Q$. Probar que $\widetilde{\varphi}$ se extiende de forma única a un morfismo de anillos (que designaremos también $\widetilde{\varphi}$) de $\mathcal{O}_Q(W)$ en $\mathcal{O}_P(V)$. (Observar que $\widetilde{\varphi}$ no puede extenderse a todo $k(W)$.) Probar que $\widetilde{\varphi}(M_Q(W)) \subset M_P(V)$.

2. Sea $T : A^n \to A^n$ un cambio de coordenadas afín, $T(P) = Q$. Probar que $\widetilde{T} : \mathcal{O}_Q(A^n) \to \mathcal{O}_P(A^n)$ es un isomorfismo. Probar que $\widetilde{T}$ induce un isomorfismo de $\mathcal{O}_Q(V^T)$ en $\mathcal{O}_P(V)$ si $P \in V \subset A^n$.

3. Sean $P = (0, \ldots, 0) \in A^n$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_P(A^n)$, $M = M_P(A^n)$. Sea $I = (X_1, \ldots, X_n) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$. Probar que $I\mathcal{O} = M$, y que por lo tanto $I^r\mathcal{O} = M^r$ para todo r.

4. Sean $V \subset A^n$ una variedad, $I = I(V) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, $P \in V$ y $J \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ un ideal que contenga a I. Sea J' la imagen de J en $\Gamma(V)$. Probar que existe un morfismo natural $\varphi : \mathcal{O}_P(A^n)/J\mathcal{O}_P(A^n) \to \mathcal{O}_P(V)/J'\mathcal{O}_P(V)$, que es un isomorfismo. En particular $\mathcal{O}_P(A^n)/I\mathcal{O}_P(A^n)$ es isomorfo a $\mathcal{O}_P(V)$.

5. Un punto simple P de una curva F se denomina *inflexión* si $\operatorname{ord}_P^F(L) \geq 3$, donde L es la recta tangente a F en P. La inflexión se denomina *ordinaria* si $\operatorname{ord}_P^F(L) = 3$ y es de orden *superior* en otro caso.
   a) Sea $F = Y - X^n$. ¿Para qué valores de n posee F una inflexión en $P = (0, 0)$, y qué tipo de inflexión?
   b) Supongamos que $P = (0, 0)$, $L = (Y)$ es la recta tangente, $F = Y + aX^2 + \ldots$. Probar que P es un punto de inflexión de F si y sólo si $a = 0$. Dar un criterio sencillo que sirva para calcular $\operatorname{ord}_P^F(Y)$, y por lo tanto para determinar si P es una inflexión de orden superior.

6. Sea P un punto de una curva irreducible, y $M = M_P(F)$. Probar que $\dim_k(M^n/M^{n+1}) = n + 1$ para $0 \leq n < m_P(F)$. En particular, P es un punto simple si y sólo si $\dim_k(M/M^2) = 1$; si no $\dim_k(M/M^2) = 2$.

7. Sea $V = V(X^2 - Y^3, Y^2 - z^3) \subset A^3$, $P = (0, 0, 0)$, $M = M_P(V)$. Probar que $\dim_k(M/M^2) = 3$. (Ver problema 19 de la práctica 2.)

8. *a*) Sea $\mathcal{O} = \mathcal{O}_P(A^2)$ para cierto $P \in A^2$, $M = M_P(A^2)$. Calcular $\chi(n) = \dim_k(\mathcal{O}/M^n)$.
   b) Sea $\mathcal{O} = \mathcal{O}_P(A^r)$. Probar que $\chi(n)$ es un polinomio de grado r en n, con coeficiente principal 1/r!.

9. Sea $F \in k[X_1, \ldots, X_r]$ una hipersuperficie en A^r, que descompuesta en formas es $F = F_m + F_{m+1} + \ldots$, de donde $m = m_P(F)$ con $P = (0, 0)$. Supongamos que F es irreducible y sea $\mathcal{O} = \mathcal{O}_P(V(F))$ y M su ideal maximal. Probar que $\chi(n) = \dim_k(\mathcal{O}/M^n)$ es un polinomio de grado $r - 1$ para n suficiente grande, y que el coeficiente principal de χ es $m_P(F)/(r-1)!$.

10. Considere las siguientes curvas planas:

$$F_1 = Y - X^2 \qquad F_3 = Y^2 - X^3 \qquad F_5 = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$$
$$F_2 = Y^2 - X^3 + X \qquad F_4 = Y^2 - X^3 - X^2 \qquad F_6 = (X^2 + Y^2)^3 - X^2Y^2.$$

    Si $P = (0, 0)$, calcule $I(P, F_i \cap F_j)$ para cada $i < j$.

11. Probar que una recta L es tangente a la curva F en el punto P si y sólo si $I(P, F \cap L) > m_P(F)$.

12. Si P es un punto simple de F, entonces $I(P, F \cap (G+H)) \geq \text{mín}(I(P, F \cap G), I(P, F \cap H))$. Dar un ejemplo que pruebe que esta propiedad puede ser falsa si P no es un punto simple de F.

13. Sea F una curva plana afín. Sea L una recta que no sea componente de F. Supongamos que $L = \{(a+tb, c+td) : t \in k\}$. Se define $G(T) = F(a+Tb, c+Td)$. Descompongamos $G(T) = \alpha \prod (T - \lambda_i)^{e_i}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Probar que existe una correspondencia natural uno a uno entre las λ_i y los puntos $P_i \in L \cap F$. Probar que por esta correspondencia $I(P_i, L \cap F) = e_i$. En particular $\sum I(P, L \cap F) \leq \text{gr}(F)$.

14. Supongamos que P es un punto doble de una curva F y que F sólo posee una tangente L en P.
    a) Probar que $I(P, F \cap L) \geq 3$. Se dice que F posee una *cúspide* en P si $I(P, F \cap L) = 3$.
    b) Supongamos que $P = (0,0)$, y $L = Y$. Probar que P es una cúspide si y sólo si $F_{XXX}(P) \neq 0$. Dar ejemplos.
    c) Probar que si P es una cúspide de F entonces F posee una sola componente que pasa por P.

15. Un punto P de una curva F se llama *hipercúspide* si $m_P(F) > 1$, F posee una sola recta tangente L en P, y además $I(P, L \cap F) = m_P(F) + 1$. Generalizar los resultados del problema anterior a este caso.

16. El objetivo de este ejercicio es buscar una propiedad del anillo local $\mathcal{O}_P(F)$ que determine si P es un punto múltiple ordinario de F o no.
    Sea F una curva plana irreducible, $P = (0,0)$, $m = m_P(F) > 1$. Sea $M = M_P(F)$. Para $G \in k[X,Y]$, designaremos su clase residual en $\Gamma(F)$ por g; y para $g \in M$, su clase residual en M/M^2 por $\overline{g}$.
    a) Probar que la aplicación del conjunto {formas de grado 1 de $k[X,Y]$} en M/M^2 que transforma $aX + bY$ en $\overline{aX + bY}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales (ver problema 6).
    b) Supongamos que P es un punto múltiple ordinario, con tangentes $L_1, \ldots, L_m$. Probar que $I(P, F \cap L_i) > m$ y $\overline{l_i} \neq \overline{\lambda l_j}$ para todo $i \neq j$, y todo λk.
    c) Supongamos que existen $G_1, \ldots, G_m \in k[X,Y]$ tales que $I(P, F \cap G_i) > m$ y $\overline{g_i} \neq \overline{\lambda g_j}$ para todo $i \neq j$ y todo $\lambda \in k$. Probar que P es un punto múltiple ordinario de F.
    (Sugerencia: si se escribe $G_i = L_i +$ términos superiores, $\overline{l_i} = \overline{g_i} \neq 0$, y L_i es la tangente a G_i, luego L_i es tangente a F por una de las propiedades de los números de intersección. Entonces F posee m tangentes en P.)
    d) Probar que P es un punto múltiple ordinario si y sĺo si existen $g_1, \ldots, g_m \in M$ tales que $\overline{g_i} \neq \overline{\lambda g_j}$ para todo $i \neq j$, $\lambda \in k$, y $\dim \mathcal{O}_P(F)/(g_i) > m$.