Geometría Proyectiva

Primer Cuatrimestre 2004

Práctica 7

1. Sea F una curva proyectiva plana. Probar que P es un punto múltiple de F si y sólo si $F(P) = F_X(P) = F_Y(P) = F_Z(P) = 0$.

2. Probar que las siguientes curvas son irreducibles; buscar sus puntos múltiples, las multiplicidades y las tangentes en los puntos múltiples.

   a) $XY^4 + YZ^4 + XZ^4$

   b) $X^2Y^3 + X^2Z^3 + Y^2Z^3$

   c) $Y^2Z - X(X-Z)(Z-\lambda Z)$, $\lambda \in k$

   d) $X^n + Y^n + Z^n$, $n > 0$.

3. Buscar todos los puntos de intersección de los siguientes pares de curvas, y los correspondientes números de intersección.

   a) $Y^2Z - X(X-2Z)(X+Z)$ y $Y^2 + X^2 - 2XZ$

   b) $(X^2+Y^2)Z + X^3 + Y^3$ y $X^3 + Y^3 - 2XYZ$

   c) $Y^5 - X(Y^2 - XZ)^2$ y $Y^4 + Y^3Z - X^2Z^2$

   d) $(X^2+Y^2)^2 + 3X^2YZ - Y^3Z$ y $(X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2Z^2$

4. Sea P un punto simple de F. Probar que la recta tangente a F en P es $F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_Z(P)Z = 0$.

5. Sea $f \in k[X,Y]$ un polinomio y sea $V(f) \subset A^2$ la curva afin definida por f. Sea $F = f^* \in k[X,Y,Z]$ la homogeneización de f y $V^* = V(F) \subset P^2(k)$ la clausura proyectiva de $V(f)$. Verificar que las rectas asintóticas de $V(f)$ (segun definición dada en clase) corresponden a las rectas tangentes de $V(F)$ en los puntos de la recta del infinito $Z = 0$. Tratar primero el caso en que dichos puntos de $V(F)$ son no-singulares.

6. Sea $P = (0:1:0)$, F una curva de grado n, $F = \sum F_i(X,Z)Y^{n-i}$, donde F_i es una forma de grado i. Probar que $m_P(F)$ es el menor m tal que $F_m \neq 0$, y los factores de F_m determinan las tangentes a F en P.

7. Para todo $P \in F$, probar que $m_P(F_X) \geq m_P(F) - 1$.

8. Probar que dos curvas planas sin componentes comunes se cortan en un número finito de puntos.

9. Sea F una curva irreducible.

   a) Probar que F_X, F_Y o $F_Z \neq 0$.

   b) Probar que F posee un número finito de puntos múltiples.

10. Sea F una cúbica irreducible, $P = (0:0:1)$ una cúspide de F, $Y = 0$ la recta tangente a F en P. Probar que $F = aY^2Z - bX^3 - cX^2Y - dXY^2 - eY^3$. Buscar un isomorfismo proyectivo T tal que

    a) $F^T = Y^2Z - X^3 - cX^2Y - dXY^2 - eY^3$

    b) $F^T = Y^2Z - X^3 - dXY^2 - eY^3$ (cambiar X por $X - c/3Y$)

    c) $F^T = Y^2Z - X^3$ (cambiar Z por $Z + dX + eY$)

    Por lo tanto, salvo equivalencia proyectiva, existe una sola cúbica con una cúspide. Verificar que no tiene otras singularidades.

11. Probar que salvo equivalencia proyectiva existe una sola cúbica irreducible con un nodo: $XYZ - X^3 - Y^3$. Verificar que no tiene otras singularidades.

12. *a*) Supongamos que $P = (0:1:0) \notin F$, F una curva de grado n. Probar que $\sum_P I(P, F \cap X) = n$.

    b) Probar que si F es una curva de grado n y L es una recta no contenida en F, entonces $\sum_P I(P, F \cap L) = n$.

13. Probar que una cúbica irreducible o es no singular o posee, a lo sumo un punto doble (un nodo o una cúspide).

    (Sugerencia: usar el problema 10, donde L es una recta que une dos puntos múltiples; o usar los problemas 10 y 11.)

14. Sean $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^2$. Probar que existe un número infinito de rectas que pasan por P_1 y que no pasan por $P_2, \ldots, P_n$. Si P_1 es un punto simple de F, esas rectas las podemos tomar transversales a F en P_1.

15. Sea C una curva proyectiva plana irreducible, $P_1, \ldots, P_n$ puntos simples de C, $m_1, \ldots, m_n$ enteros. Probar que existe un $z \in k(C)$ con $\operatorname{ord}_{P_i}(z) = m_i$, para $i = 1, \ldots, n$.
(Sugerencia: considerar las rectas L_i como en el problema anterior, y una recta L_0 que no pase por ningún P_i, y tomar $z = \prod L_i^{m_i} L_0^{-\sum m_i}$.)

16. Sea F una curva irreducible de $\mathbb{P}^2$. Supongamos que $I(P, F \cap Z) = 1$, y $P \neq (1:0:0)$. Probar que $F_X(P) \neq 0$.
(Sugerencia: si no, usar la fórmula de Euler para probar que $F_Y(P) = 0$, que contradice el hecho que Z no es tangente a F en P.)

17. Probar que toda curva proyectiva plana no singular es irreducible. ¿Es cierto para curvas afines?

18. Sea F una curva irreducible de grado n. Supongamos que $F_X \neq 0$. Probar que $\sum m_P(F)(m_P(F) - 1) \leq n(n-1)$. En particular F tiene a lo sumo $\frac{1}{2}n(n-1)$ puntos múltiples. (Ver problemas 7 y 9.)

19. Sea F una curva proyectiva plana de grado n y supongamos que F no contiene rectas. Sean $F_i = F_{X_i}$ y $F_{ij} = F_{X_i X_j}$, que son formas de grados $n-1$ y $n-2$ respectivamente. Consideremos la matriz cuya coordenada (i,j) es F_{ij} y sea H el determinante de esa matriz. H se llama el *Hessiano* de F, y es una forma de grado $3(n-2)$. Supongamos que la característica de k es cero. El objetivo de este ejercicio es probar el

Teorema.

a) $P \in H \cap F$ si y sólo si P es o una inflexión o un punto múltiple de F.

b) $I(P, H \cap F) = 1$ si y sólo si P es una inflexión ordinaria.

Demostración.

a) Sea T un isomorfismo proyectivo. Entonces el Hessiano de F^T es $(\det(T)^2)H^T$. Se puede entonces suponer que $P = (0:0:1)$. Consideremos $f(X,Y) = F(X,Y,1)$, $h(X,Y) = H(X,Y,1)$, $f_x(X,Y) = F_X(X,Y,1)$, etc.

b) $(n-1)F_j = \sum_i X_i F_{ij}$ (esto es la fórmula de Euler aplicado a F_j).

c) $I(P, f \cap h) = I(P, f \cap g)$, donde $g = f_y^2 f_{xx} + f_x^2 f_{yy} - 2 f_x f_y f_{xy}$.
(Sugerencia: hacer las siguientes operaciones de filas y columnas en la matriz que define h: sumar X veces la primera más Y veces la segunda a la tercera y usar (b). Hacer lo mismo con las columnas. Luego calcular el determinante.)

d) Si P es un punto múltiple de F, entonces $I(P, f \cap g) \geq 2$.

e) Supongamos que P es un punto simple de F, Y la recta tangente a F en P, luego $f = Y + aX^2 + bXY + xY^2 + dX^3 +$ otros términos. P es una inflexión si y sólo si $a = 0$. P es una inflexión ordinaria si y sólo si $a = 0$ y $d \neq 0$. Probar que $g = 2a + (6d + 2ab)X +$ términos superiores, lo que termina la demostración.

Corolarios.

(1) Una curva no singular de grado mayor que 2 posee siempre una inflexión

(2) Una cúbica no singular tiene nueve inflexiones ordinarias.

20. Sea $P \in F$ un punto no singular, sea T la recta tangente a F en P y sea H el hessiano de F. Demostrar que $I(P, F \cap T) - 2 = I(P, F \cap H)$.

21. *a*) Sea $a = (0:1:0)$ una inflexión de una cúbica irreducible F, $Z = 0$ la recta tangente a F en $(0:1:0)$ (la característica de k es cero). Probar que $F = ZY^2 + bYZ^2 + cXYZ + G(X,Z)$. Buscar un isomorfismo proyectivo T tal que $F^T = ZY^2 - C(X,Z)$ donde C es una forma de grado 3. (Cambiar Y por $Y - b/2Z - c/2X$.)

b) Probar que toda cúbica irreducible es proyectivamente equivalente a una de las siguientes:

1) $Y^2 Z - X^3$

2) $Y^2 Z - X^2(X + Z)$

3) $Y^2 Z - X(X - Z)(X - \lambda Z)$ con $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0, 1$ (ver problemas 10 y 11).