Práctica 2

1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal. Se definen,

$$\begin{aligned} L_\phi &: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^* \quad \text{por} \quad L_\phi(v) = \phi(v, \ ) \\ R_\phi &: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^* \quad \text{por} \quad R_\phi(v) = \phi(\ , v) \end{aligned}$$

a) Probar que L_ϕ y R_ϕ son transformaciones lineales.
¿Cuál es la relación entre ambas cuando ϕ es simétrica?

b) Dada $\mathbf{B}$ base de $\mathbb{V}$, calcular $\|L_\phi\|_{\mathbf{BB}^*}$ y $\|R_\phi\|_{\mathbf{BB}^*}$ y verificar que una es la transpuesta de la otra.

c) Dada $\mathbf{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, base de $\mathbb{V}$, se define al matriz de ϕ en la base $\mathbf{B}$ por:

$$M_{\mathbf{B}} = (\phi(v_i, v_j))$$

(i) Mostrar que si $\mathbf{B}'$ es otra base de $\mathbb{V}$, entonces:

$$M_{\mathbf{B}'}(\phi) = C(\mathbf{B}', \mathbf{B})^t \ . \ M_{\mathbf{B}}(\phi) \ . \ C(\mathbf{B}', \mathbf{B})$$

y deducir que : $M_{\mathbf{B}}(\phi)$ es simétrica si y sólo si $M_{\mathbf{B}'}(\phi)$ lo es.

d) Verificar que $\det(M_{\mathbf{B}}(\phi))$ y $\det(M_{\mathbf{B}'}(\phi))$ tienen el mismo signo.

e) Mostrar que : ϕ es simétrica si y sólo si $M_{\mathbf{B}}(\phi)$ lo es para toda base $\mathbf{B}$.

f) ¿Existe $\mathbf{B}$, base de $\mathbb{R}^2$, tal que $M_{\mathbf{B}}(\phi) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ si $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal dada por

$$\phi(x, y) = x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1?$$

g) Verificar que si ϕ es simétrica : $\ker(\phi) = \ker(L_\phi) = \ker(R_\phi)$.
Deducir que : L_ϕ es isomorfismo si y sólo si $\ker(\phi) = 0$.

h) Verificar que si ϕ es simétrica : $\|L_\phi\|_{\mathbf{BB}'} = M_{\mathbf{B}}(\phi)$ para toda base $\mathbf{B}$.

2. Sea ϕ una forma bilineal simétrica en $\mathbb{V}$. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) $\ker(\phi) = 0$

b) Para toda $\varphi \in \mathbb{V}^*$ existe un único $v \in \mathbb{V}$ tal que $\varphi(x) = \phi(v, x)$ para todo $x \in \mathbb{V}$.

3. Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{BS}(\mathbb{V}) &= \{\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \phi \text{ es bilineal y simétrica}\} \\ \mathcal{S}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \ / \ A = A^t\} \end{aligned}$$

Probar que para cada base $\mathbf{B}$ de $\mathbb{V}$, la aplicación $M_{\mathbf{B}} : \mathcal{BS}(\mathbb{V}) \longrightarrow \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ dada por "$\phi \mapsto M_B(\phi) =$ matriz de ϕ en $\mathbf{B}$" es un isomorfismo.

¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{BS}(\mathbb{V})$?

4. Sea $\phi \in \mathcal{BS}(\mathbb{R}^{n\times 1})$. Probar que existe una única $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica, tal que

$$\phi(x,y) = x^t A y$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

5. Sea $\phi : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica tal que, en una cierta base $\mathbf{B}$ de $\mathbb{V}$, es

$$M_{\mathbf{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \overset{k}{\ddots} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \overset{n-k}{\ddots} & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

¿Es posible encontrar $v \in \mathbb{V}$ tal que : $v \notin \ker(\phi)$ y $\phi(v,v) = 0$?

6. Hallar en cada caso el hiperplano polar H_v de v respecto de ϕ

a) $\phi : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $v = (1,0)$

b) $\phi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $v = (1,-2,3)$

7. Para cada una de las siguientes formas bilineales simétricas, hallar la descomposición de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}^+$, $\mathbb{V}^-$ y $\mathbb{V}^0$ y calcular el índice, el rango y la dimensión del núcleo

a) $\phi : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = 3x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2$

b) $\phi : \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = 2x_2y_1 + 3x_3y_1 + x_4y_1 + 2x_1y_3 - x_2y_2 + 5x_4y_2 + 3x_1y_3 + 4x_3y_3 - 5x_4y_3 + x_1y_4 + 5x_2y_4 - x_3y_4 - 3x_4y_4$

c) $\phi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = x_1y_1 + x_3y_1 - 3x_2y_2 + 3x_3y_2 + x_1y_3 + 3x_2y_3 - 2x_3y_3$

8. Sea $\phi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x,y) = x \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} y^t$. Hallar una base $\mathbf{B} = \{v_i\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{\mathbf{B}}(\phi)$ sea diagonal y $\phi(v_i,v_i) = \pm 1, 0$ para todo i.

9. Sea $\phi \in \mathcal{BS}(\mathbb{R}^{2n+1})$ no degenerada y tal que índ(ϕ) es impar. Probar que para toda base $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^{2n+1}$ es $\det(M_{\mathbf{B}}(\phi)) > 0$.

10. Desigualdad de Schwarz

Sea $\phi \in \mathcal{BS}(\mathbb{V})$ semidefinida y sea ψ su forma cuadrática asociada. Probar que

$$|\phi(x,y)|^2 \leqslant \psi(x)\psi(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{V}$.

11. Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ espacios vectoriales, $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ lineal y $\psi : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Sea ϕ la forma bilineal asociada a ψ. Probar que

a) $\psi' : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\psi'(x) = \psi(f(x))$, es una forma cuadrática.

b) Si $\phi' : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal asociada a ψ', entonces $\phi'(x, y) = \phi(f(x), f(y))$.

12. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, $\psi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y ϕ la forma bilineal asociada. Se definen:

$$\psi_A = \psi \circ \tau_A^{-1} \qquad \text{y} \qquad \phi_A = \phi \circ (\tau_A^{-1} \times \tau_A^{-1})$$

a) Mostrar que $\mathrm{rg}(\psi_A) = \mathrm{rg}(\psi)$ e $\mathrm{índ}(\psi_A) = \mathrm{índ}(\psi)$

b) Mostrar que $\ker(\phi_A) = A + \ker(\phi)$

c) Sea $\mathbf{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base adaptada a ψ y $\mathbf{B}_A = \{v_1 + A, \ldots, v_n + A\}$. Mostrar que $\mathbf{B}_A$ es una base adaptada a ψ_A.

13. Sea $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática tal que, para un $A \in \mathbb{V}$, es

$$F(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) + c_A$$

donde $\psi_A : \mathbb{V}_A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, $\varphi_A \in \mathbb{V}_A^*$ y $c_A \in \mathbb{R}$. Si además, para $B \in \mathbb{V}$, F se escribe en la forma

$$F(x) = \psi_B(x) + 2\varphi_B(x) + c_B$$

con $\psi_B : \mathbb{V}_B \longrightarrow \mathbb{R}$ forma cuadrática, $\varphi_B \in \mathbb{V}_B^*$ y $c_B \in \mathbb{R}$, probar que

$$\psi_B(x) = \psi_A(x \underset{A}{-} B) \qquad \text{y} \qquad \varphi_B(x) = \varphi_A(x \underset{A}{-} B) + \phi_A(B, x \underset{A}{-} B)$$

14. Sea $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática. Verificar:

a) $a.F$ es una función cuadrática para todo $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

b) $\mathrm{rg}(a.F) = \mathrm{rg}(F)$ para todo $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

c) $\mathrm{índ}(a.F) = \mathrm{índ}(F)$ para todo $a \in \mathbb{R}_{>0}$

d) $\mathrm{índ}(a.F) = \mathrm{rg}(F) - \mathrm{índ}(F)$ para todo $a \in \mathbb{R}_{<0}$.

15. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{V}^*$ no nulas y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Probar que

a) $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(x) = (\varphi_1(x) + c_1)(\varphi_2(x) + c_2)$ es una función cuadrática.

b) para cada $A \in \mathbb{V}$ existen $\varphi_1', \varphi_2' \in \mathbb{V}_A^*$ no nulas y $c_1', c_2' \in \mathbb{R}$ tales que la función cuadrática definida en **a)** se escribe:

$$F(x) = (\varphi_1'(x) + c_1')(\varphi_2'(x) + c_2')$$

16. Sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $f : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}$ una transformación lineal.

a) Probar que si $\phi_f : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $\phi_f(u,v) = \phi(f(u), f(v))$ entonces, $f^{-1}(\ker(\phi)) \subset \ker(\phi_f)$.

b) Verificar que si f es isomorfismo, entonces $\ker(\phi_f) = f^{-1}(\ker(\phi))$

c) Mostrar que si f es isomorfismo, entonces $M_B(\phi_f) = M_{f(B)}(\phi)$

d) Mostrar que si $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ y f es isomorfismo, entonces

$$M_B(\phi_f) = \|f\|_B^t \;.\; M_B(\phi) \;.\; \|f\|_B$$

Deducir que $\det(M_B(\phi_f))$ y $\det(M_B(\phi))$ tienen el mismo signo.

17. a) Construir una forma bilineal simétrica ϕ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\dim\ker(\phi) = \text{índ}(\phi) = 1$ y encontrar bases de $\mathbb{V}^+$, $\mathbb{V}^-$ y $\mathbb{V}^0$.

b) Construir una forma bilineal simétrica ϕ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\ker\phi = [(-2,0,1)]$.

c) En cada uno de los casos siguientes, encontrar –cuando sea posible– un isomorfismo f tal que $\psi' = \psi_f$

(i) $\psi(x) = -2x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2$, $\psi'(x) = -x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$

(ii) $\psi(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$, $\psi'(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$

18. Hallar una forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$ de rango 3, índice 2 y cuyo núcleo esté generado por $(-1,0,1,0)$.

19. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ un subespacio no nulo y ϕ una forma bilineal simétrica en $\mathbb{V}$.

a) Probar que si $\phi_{\mathbb{S}} = \phi|_{\mathbb{S}\times\mathbb{S}}$ es no degenerada, entonces $\mathbb{S} \cap \ker\phi = 0$.

b) Encontrar dos subespacios $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ de $\mathbb{R}^3$ –de dimensión máxima– con la propiedad que cada $\phi_{\mathbb{S}_i}$ es no degenerada, siendo:

$$M_E(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Probar que $\mathbb{S}$ es un subespacio –de dimensión máxima– con la propiedad que $\phi_{\mathbb{S}}$ es no degenerada si y sólo si $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \ker\phi$.

20. a) Encontrar una ecuación del hiperplano polar de $(1,0,-1)$ respecto de la forma bilineal ϕ dada por

$$\phi(x,y) = 4x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

b) Encontrar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ sea la ecuación del hiperplano polar de v respecto de la forma ϕ dada en **a)**.

c) Encontrar una forma bilineal simétrica ϕ en $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ sea la ecuación del hiperplano polar de $(0,1,-1)$.

21. Decidir si las siguientes funciones $\psi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ son formas cuadráticas

a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \quad , \quad \psi(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3$

b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 \quad , \quad \psi(x) = x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_1$

c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4 \quad , \quad \psi(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_1x_3$

En caso de serlo, hallar su matriz respecto de la base canónica.

22. Hallar en cada caso el cono asociado a la forma cuadrática

a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \quad , \quad \psi(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \quad , \quad \psi(x) = x_1^2$

c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \quad , \quad \psi(x) = x_1^2 - x_2^2$

¿En alguno de estos casos coincide con el núcleo de la forma bilineal asociada?

23. Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática tal que su cono es el conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - 2x_2 = 0\}$$

a) Hallar una base de $\ker \phi$

b) Encontrar una ψ tal que $\mathcal{C}_\psi = \mathcal{C}$.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)