Práctica 5

1. Encontrar una curva parametrizada α cuya traza sea el círculo $x^2 + y^2 = 1$, que lo recorra en el sentido de las agujas del reloj y tal que $\alpha(0) = (0, 1)$.

2. Sea α una curva parametrizada que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, mostrar que el vector posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

3. Una curva parametrizada tiene la propiedad que $\alpha''(t) \equiv 0$. ¿Qué se puede decir de α?

4. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y sea $v \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Suponiendo que $\alpha'(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$ y que $\alpha(0)$ también es ortogonal a v, probar que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.

5. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Mostrar que $|\alpha(t)|$ es una constante no nula si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

6. Probar las siguientes propiedades del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$:

a) $u \wedge v = \left|\begin{smallmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{smallmatrix}\right| e_1 - \left|\begin{smallmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{smallmatrix}\right| e_2 + \left|\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{smallmatrix}\right| e_3$

b) $u \wedge v = -v \wedge u$

c) $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es bilineal

d) $u \wedge v = 0$ si y sólo si u y v son linealmente dependientes

e) $< u \wedge v, x \wedge y >= \det \left(\begin{smallmatrix} <u,x> & <v,x> \\ <u,y> & <v,y> \end{smallmatrix}\right)$

f) $(u \wedge v) \wedge w =< u, v > v- < v, w > u$
Concluir que $\wedge$ no es asociativo.

7. Sean $\mathbf{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathbf{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}'$ tienen la misma orientación

b) Existe $f : [0, 1] \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^3$ continua y tal que

(i) $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ es una base para todo $t \in [0, 1]$

(ii) $f(0) = \mathbf{B}$ y $f(1) = \mathbf{B}'$.

8. Probar que una condición necesaria y suficiente para que el plano $\pi : ax + by + cz = 0$ y la recta L dada por las ecuaciones

$$x - x_0 = u_1 t \quad , \quad y - y_0 = u_2 t \quad , \quad z - z_0 = u_3 t$$

sean paralelos es que : $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$.

9. **Area orientada en $\mathbb{R}^2$**

La orientación natural de $\mathbb{R}^2$ hace posible asociar un signo al área A del paralelogramo generado por dos vectores linealmente independientes $u, v \in \mathbb{R}^2$. Teniendo en cuenta la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} < u,u > & < u,v > \\ < v,u > & < v,v > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

concluir que

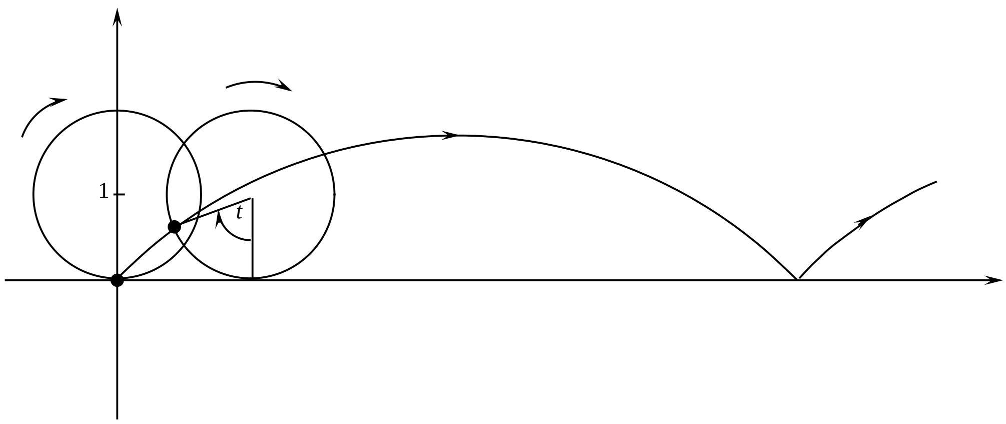
$$A^2 = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}^2$$

Decimos que A es positiva o negativa según que la orientación de $\{u, v\}$ sea positiva o negativa.

10. Mostrar que las rectas tangentes a la curva regular $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta de ecuaciones : $y = 0$, $z = x$.

11. **Cicloide**

Un disco circular de radio 1 se mueve a lo largo del eje x. La figura descripta por un punto de la circunferencia del disco se llama ***cicloide***



a) Obtener una curva parametrizada cuya traza sea la cicloide y determinar sus puntos singulares.

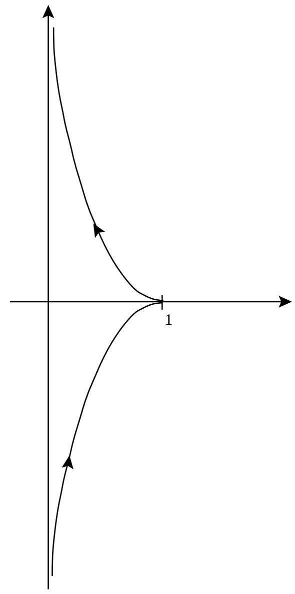
b) Calcular la longitud de arco de la cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

12. **Tractriz**

Sea $\alpha : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (\operatorname{sen} t \ , \ \cos t \ + \ \ln(\operatorname{tg}(\tfrac{t}{2})))$$

donde t es el ángulo que el eje y forma con el vector $\alpha(t)$. La traza de esta curva se llama ***tractriz***.



Mostrar que

a) α es una curva diferenciable parametrizada, regular salvo en $t = \pi/2$

b) la longitud de segmento de la tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el eje y es constantemente igual a 1.

13. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable y sea $[a, b] \subset I$. Para cada partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$ considere la suma

$$\ell(\alpha, \pi) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

Probar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\pi\| = \text{máx}\{t_i - t_{i-1} \ / \ 1 \leqslant i \leqslant n\} < \delta$, entonces

$$\left| \int_a^b |\alpha'(t)| \ dt \ - \ \ell(\alpha, \pi) \right| < \varepsilon$$

14. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y $p, q \in \mathbb{R}^3$. Sea $[a, b] \subset I$ tal que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

a) Mostrar que para todo $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $|v| = 1$ se tiene

$$< q - p, v > \ = \ \int_a^b < \alpha'(t), v > \ dt \ \leqslant \ \int_a^b |\alpha'(t)| \ dt$$

b) Sea $v = \dfrac{q-p}{|q-p|}$. Mostrar que

$$|q - p| \ \leqslant \ \int_a^b |\alpha'(t)| \ dt$$

i.e., la curva de menor longitud que une p con q es el segmento de recta que los une.

15. Curvas equivalentes

Sean $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\beta : (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas parametrizadas. Se dice que α y β son ***equivalentes*** si existe $f : (c, d) \longrightarrow (a, b)$ diferenciable y estrictamente creciente con $f(c) = a$, $f(d) = b$ tal que $\beta = \alpha \circ f$.

Probar

a) Si γ_1, γ_2 son dos curvas parametrizadas equivalentes y p es un punto simple sobre su traza, entonces γ_1 y γ_2 tienen la misma dirección en p.

b) Si γ_1, γ_2 son dos curvas parametrizadas equivalentes, entonces $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

c) Sean α, β dos curvas parametrizadas equivalentes, sea $\tilde{\alpha}$ la parametrización natural de α desde t_0 y $\tilde{\beta}$ la parametrización natural de β desde $f^{-1}(t_0)$, entonces $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$.

16. Sea $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1 tal que $c(b) \neq c(a)$. Probar que existe un punto de la curva donde el vector tangente es paralelo a $c(b) - c(a)$.

17. Sea $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. Probar que es localmente inyectiva.

18. Sea $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^2 parametrizada por longitud de arco y sea $s_0 \in (a, b)$ tal que $c'(s_0) \neq 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $s_1, s_2, s_3 \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ son todos distintos, entonces los puntos $c(s_1)$, $c(s_2)$, $c(s_3)$ no están alineados.

19. Sea $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^2 tal que existe $t \in (a, b)$ con $c'(t), c''(t) \neq 0$, $< c'(t), c''(t) >= 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $t_1, t_2 \in (t - \delta, t + \delta)$, entonces el conjunto $\{c'(t_1), c''(t_2)\}$ es linealmente independiente.

20. Sea $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por longitud de arco. Probar que

$$\kappa(s) = \det \begin{pmatrix} c_1'(s) & c_1''(s) \\ c_2'(s) & c_2''(s) \end{pmatrix}$$

21. Sea $\kappa : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que existe una curva $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco cuya curvatura en s es $\kappa(s)$ para todo $s \in [a, b]$.

Comprobar además que si c y $\bar{c}$ son dos de tales curvas, entonces existe A (traslación compuesta con rotación) tal que $\bar{c} = A \circ c$.

Sugerencia: probar que

(i) existe $T : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T'(s) = \kappa(s)(-t^2(s), t^1(s))$ con $|T(a)| = 1$

(ii) existe $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $c'(s) = T(s)$.

22. Sea $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por longitud de arco y tal que $\kappa(s) = r$ para todo $s \in [a, b]$. ¿Cómo es c?

23. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow S^1$ continua. Probar que existe $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\gamma(t) = (\cos(f(t)), \mathrm{sen}(f(t)))$.

Comprobar además que si f y $\bar{f}$ son dos de tales funciones, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f - \bar{f} = 2k\pi$.

24. Probar que si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es plana, su plano osculador en cada punto es el plano que la contiene.

25. Probar que la fórmula de la torsión de una curva con una parametrización arbitraria es:

$$\tau = \frac{< \dot{c} \wedge \ddot{c}\,, \dddot{c} >}{|\dot{c} \wedge \ddot{c}|^2}$$

26. **a)** Caracterizar las curvas parametrizadas por longitud de arco con curvatura nula.

b) Idem para el caso de torsión nula.

c) Caracterizar las curvas parametrizadas por longitud de arco tales que $\tau \equiv 0$ y κ es constante. ¿Se obtiene el mismo resultado sin pedir $\tau \equiv 0$?

Sugerencia: considerar la hélice circular $c(u) = (a\cos u, a \operatorname{sen} u, bu)$.

27. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco, probar que existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $\alpha(-\delta, \delta)$ está contenido en el semiespacio respecto del plano rectificante que contiene a $N(0)$.

28. Sea la curva

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & , \ t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & , \ t < 0 \\ (0,0,0) & , \ t = 0 \end{cases}$$

a) Probar que α es diferenciable

b) Probar que α es regular en todo punto y que la curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \neq 0, \pm\sqrt{2/3}$

c) Mostrar que el límite de los planos osculadores cuando t tiende a 0 por la derecha es el plano $y = 0$ pero que si t tiende a 0 por la izquierda, es el plano $z = 0$.

Concluir que el vector normal es discontinuo en $t = 0$. Esto muestra por qué excluimos los puntos en los que κ se anula.

d) Mostrar que τ se puede definir en todo punto y que resulta ser idénticamente nula.

Concluir que puede suceder que una curva tenga torsión nula sin ser plana.

29. Hallar la curvatura y la torsión de las siguientes curvas

a) $\alpha(u) = (u, u^2, u^3)$

b) $\alpha(u) = (u, \frac{u+1}{u}, \frac{1-u^2}{u})$

c) $\alpha(u) = (a(u - \operatorname{sen} u), a(1 - \cos u), bu)$

30. **a)** Demostrar que si todas las rectas tangentes a una curva regular pasan por un punto fijo, entonces la curva es una recta.

b) Idem si todas esas rectas tangentes son paralelas a una recta dada.

31. **a)** Probar que si los planos osculadores de una curva pasan por un punto fijo, entonces la curva es plana.

b) Idem si todos son paralelos a un plano dado.

32. Una curva $c : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco se dice una ***hélice*** si la recta tangente a c forma un ángulo constante con alguna dirección.

a) Suponiendo $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in (a, b)$, probar que todas las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) c es una hélice

(ii) $\kappa/\tau =$ constante

(iii) las rectas que contienen a $N(s)$ y que pasan por $c(s)$ son paralelas a un plano fijo.

(iv) las rectas que contienen a $B(s)$ y que pasan por $c(s)$ forman un ángulo constante con una dirección fija.

b) La curva $c(s) = \left(\frac{a}{c} \int \operatorname{sen}(\theta(s))\, ds, \frac{a}{c} \int \cos(\theta(s))\, ds, \frac{b}{c} s\right)$, con $a^2 = b^2 + c^2$ es una hélice. Además $\kappa/\tau \equiv b/a$.

33. Hallar los centros de curvatura y los círculos osculadores de la elipse.

34. Probar que si todas las rectas normales a una cruva pasan por un punto fijo, entonces la traza está contenida en una circunferencia.

35. Movimiento rígido en $\mathbb{R}^3$

Un ***movimiento rígido*** en $\mathbb{R}^3$ es la composición de una traslación con una transformación ortogonal de determinante positivo. Mostrar que la longitud de arco, la curvatura y la torsión de una curva son invariantes por movimientos rígidos.

36. Dada una curva plana en coordenadas polares mediante la ecuación

$$\rho = \rho(\theta) \qquad , \qquad a \leqslant \theta \leqslant b$$

a) Mostrar que la longitud de arco es $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$, donde $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$.

b) Mostrar que la curvatura es $\kappa(\theta) = \dfrac{2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}$

37. Suponiendo que $\tau(s) \neq 0$ y $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, mostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\alpha(I)$ esté contenido en una esfera es que

$$R^2 + R'^2 T^2 = \text{ constante}$$

donde $R = \frac{1}{\kappa}$, $T = \frac{1}{\tau}$ y $R' = \frac{dR}{ds}$.

38. Sea $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. Suponiendo que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $|\alpha(t)|$ tiene un máximo en t_0, probar que

$$|\kappa(t_0)| \geqslant \frac{1}{|\alpha(t_0)|}$$

39. Mostrar que si $\tau(s) \neq 0$ para todo s, para una cierta curva α, entonces $B(s)$ determina la curvatura $\kappa(s)$ y $|\tau(s)|$ de esa curva.

40. Mostrar que si $\tau(s) \neq 0$ para todo s, para una cierta curva α, entonces $N(s)$ determina la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de esa curva.

41. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura nunca nula. Sea P un plano que satisface las siguientes condiciones:

1. P contiene a la recta tangente en s
2. dado $J \subset I$, entorno de s, existen puntos de $\alpha(J)$ a ambos lados de P.

Probar que P es el plano osculador de α en s.

42. Mostrar que la curvatura $\kappa(t) \neq 0$ de una curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la curvatura en t de la curva plana $\pi \circ \alpha$, donde π es la proyección ortogonal de α sobre el plano osculador en t.

43. Hallar la función $f(t)$ –más general posible– tal que la curva $\alpha(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, f(t))$ sea plana.

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)