Práctica 7

1. **a)** Sea M la superficie regular dada por el gráfico de una función diferenciable $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Sea $a \in A$ y $p = (a, f(a)) \in \mathbb{R}^3$. Mostrar que T_pM es el subespacio paralelo del plano tangente a f en a:

$$T_a : z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2)$$

b) Sea $M = F^{-1}(b)$ con $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que b es un valor regular. Dado $p \in M$, comprobar que en este caso, T_pM es el subespacio paralelo del plano tangente a $F(x, y, z) = b$ en p:

$$T_p : \frac{\partial F}{\partial x}(p)(x - p_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(p)(x - p_2) + \frac{\partial F}{\partial z}(p)(x - p_3) = 0$$

2. **a)** Sean $M_1 = M_2 = S^2$, $A \in \mathcal{O}(3)$ y $f : M_1 \longrightarrow M_2$ dada por $f(p) = p.A$. Probar que f es una isometría.

b) Sea $M_1 = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z) \ / \ 0 < \theta < 2\pi \ , \ z \in \mathbb{R}\}$ y $M_2 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}\{0\}$. Si $f : M_1 \longrightarrow M_2$ se define por $f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z) = (\theta, z, 0)$, probar que f es una isometría.

c) Si $M_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ y $M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$, probar que la función $f : M_1 \longrightarrow M_2$ definida por $f(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ es una isometría local.

3. Sea $c_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva dada por $c_1(t) = (a. \operatorname{ch} t, 0, a.t)$ $(a > 0)$, llamada ***catenaria***. La superficie M_1, que se obtiene rotando la catenaria c_1 alrededor del eje z, se llama ***catenoide***. La función $g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g_1(u, v) = (a. \operatorname{ch} v. \cos u, a. \operatorname{ch} v. \operatorname{sen} u, a.v)$$

es una parametrización de M_1 que verifica $g_1(\mathbb{R}^2) = M_1$.

Sea $c_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la hélice dada por $c_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, a.t)$. La ***helicoide*** M_2 es el conjunto de todas las rectas (horizontales) que unen cada punto de eje z con un punto de la hélice a la misma altura. Se define una parametrización $g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$g_2(u, v) = (0, 0, a.u) + v.((\cos u, \operatorname{sen} u, a.u) - (0, 0, a.u)) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, a.u)$$

que satisface $g_2(\mathbb{R}^2) = M_2$.

a) Verificar que M_1 y M_2 son superficies regulares

b) Sea $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $h(u, v) = (u, a. \operatorname{sh} v)$. Mostrar que h es un difeomorfismo y que $f : M_1 \longrightarrow M_2$ definida por $f(g_1(u, v)) = g_2(h(u, v))$ es una isometría local.

4. Sea $f : S^2 - N \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica desde el polo norte. Probar:

a) C es un círculo en S^2 que pasa por el polo norte si y sólo si $f(C)$ es una recta en el plano $z = 0$

b) C es un círculo en S^2 que no pasa por el polo norte si y sólo si $f(C)$ es un círculo en el plano $z = 0$.

5. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, (U, x) una carta de M alrededor de p. Verificar que $dx_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^2$ satisface $dx_p(\partial x_i|_p) = e_i$, $i = 1, 2$, donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

6. Sea $S_r^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, $N = (0, 0, r)$, $S = (0, 0, -r)$. Sea $\mathcal{C}$ el semimeridiano que une N con S y pasa por $(-r, 0, 0)$; es decir, la imagen de la curva $c(0) = (-r\cos\theta, 0, r.\operatorname{sen}\theta)$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Sea $f : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow S_r^2 - \mathcal{C}$ la parametrización de S_r^2 dada por

$$f(\alpha, \theta) = (r.\cos\alpha\cos\theta, r\operatorname{sen}\alpha\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

denominada ***coordenadas geográficas***. Si (U, x) es la carta definida por: $U = S_r^2 - \mathcal{C}$ y $x = f^{-1}$,

a) Verificar que si $p = f(\alpha, \theta)$:
$\partial x_1|_p = df_{(\alpha,\theta)}(e_1) = (-r\operatorname{sen}\alpha\cos\theta, r\cos\alpha\cos\theta, 0)$
$\partial x_2|_p = df_{(\alpha,\theta)}(e_2) = (-r\cos\alpha\operatorname{sen}\theta, -r\cos\alpha\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)$

b) $g_{11}(p) = r^2\cos^2(\theta)$, $g_{12}(p) = g_{21}(p) = 0$, $g_{22}(p) = r^2$

c) $< v, w >= v_1w_1r^2\cos^2\theta + v_2w_2r^2$,
donde (v_1, v_2) y (w_1, w_2) son, respectivamente, las componentes de v y w respecto de la base de $T_pS_r^2$ inducida por (U, x).

d) Concluir que $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ no es conforme.

7. Sea M una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y (U, x) una carta de M. Verificar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) $x : U \longrightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^2$ es conforme

b) Si $p \in U$ y $c_1, c_2 : I \longrightarrow U$ son curvas regulares tales que $c_1(t_0) = c_2(t_0) = p$ para algún $t_0 \in I$, entonces

$$\angle(\dot{c}_1(t_0), \dot{c}_2(t_0)) = \angle(x \,\widehat{\dot\circ}\, c_1(t_0), x \,\widehat{\dot\circ}\, c_2(t_0))$$

8. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular conexa y orientable. Probar que M admite dos orientaciones posibles.

9. Sea M una superficie regular de $\mathbb{R}^3$, orientable según un campo normal unitario $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sean $p \in M$, $v \in T_pM$ y S es subespacio generado por v y $N(p)$.

a) Mostrar que $p + S = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ < w, x - p >= 0\}$ para un $w \in S^\perp$, $|w| = 1$

b) Construir una parametrización (A, f) de M con $0 \in A \subset \mathbb{R}^2$, $f(0) = p$ que satisfaga $df_0(1, 0) = v$ y $df_0(0, 1) = w$

c) Sea $h : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(u, v) = (u, < w, f(u, v) - p >)$. Verificar que $dh_0(1, 0) = (1, 0)$ y $dh_1(0, 1) = (0, 1)$

d) Mostrar que existen entornos abiertos $A_0 \subset A$ de $0 \in \mathbb{R}^2$, I , J de $0 \in \mathbb{R}$ tales que $h : A_0 \longrightarrow I \times J$ es difeomorfismo.

e) Si $g : I \longrightarrow M$ está dada por $g(t) = f \circ h^{-1}(t, 0)$, comprobar que $g(0) = p$, $\dot{g}(0) = v$ y $g(t) \in M \cap (p + S)$ para cada $t \in I$.

f) Probar que existe un $\varepsilon > 0$ y una curva diferenciable $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ parametrizada por longitud de arco tal que $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = v$ y $c(t) \in M \cap (p + S)$ si $|t| < \varepsilon$.

10. Sea el plano $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ ax+by+cz = d\}$ $((a, b, c) \neq 0)$ y $N = \dfrac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Verificar que $dN_p = 0$ para todo $p \in M$ y que por lo tanto $K \equiv 0$.

11. Dados S^2, la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$, y $N : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la normal exterior, verificar que $dN_p(v) = v$ para cada $p \in S^2$ y $v \in T_pM$.

Deducir que la curvatura de Gauss de S^2 en p es 1.

12. Sean M la superficie regular de $\mathbb{R}^3$ definida por $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x^4\}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización $f(u, v) = (u, v, u^4)$ y $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $N \circ f = \dfrac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$. Verificar que $dN_0 = 0$.

13. Sea el cilindro $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$ y $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. Verificar que $dN_p(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, 0)$ para cada $p \in M$. Deducir que los autovalores de dN_p son $\lambda_1(p) = 0$, $\lambda_2(p) = 1$ y que la curvatura de Gauss es idénticamente nula.

14. Sea el paraboloide elíptico $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x^2 + y^2\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ la parametrización $f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Sea $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $N \circ f = \dfrac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$. Verificar que

$$N \circ f(u, v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}}, \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}} \right)$$

Deducir que $dN_0(v) = -2v$. Concluir que los autovalores de dN_0 son $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = -2$ y que la curvatura de Gauss en 0 es 4.

15. Sea el paraboloide hiperbólico $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = y^2 - x^2\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ la parametrización $f(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$. Sea $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $N \circ f = \dfrac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$. Verificar que

$$N \circ f(u, v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}}, \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}} \right)$$

Deducir que para cada $v \in T_0M$ es $v_3 = 0$ y $dN_0(v) = (2v_1, -2v_2, 0)$.

Concluir que los autovalores de dN_0 son $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(0) = 1$ y $K(0) = -4$.

16. Sea el cilindro parabólico $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z = x^2\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ la parametrización $f(u, v) = (u, v, u^2)$. Sea $N \circ f = \dfrac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$. Verificar que

$$N \circ f(u, v) = \left(\frac{-2u}{\sqrt{1 + u^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \right)$$

Deducir que $dN_0(v_1, v_2, v_3) = (-2v_1, 0, 0)$. Concluir que los autovalores de dN_0 son $\lambda_1(0) = -2$, $\lambda_2(0) = 0$ y $K(0) = 0$.

17. Sea M el toro de $\mathbb{R}^3$ definido por $M = F^{-1}(r^2)$, donde $F : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) \;/\; z \in \mathbb{R}\}$ está dada por $F(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$ $(a > r)$. Verificar que la aplicación $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$N(x, y, z) = \frac{1}{r} \left(\frac{x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

es un campo normal unitario en M.

Sea $f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow M$ la parametrización

$$f(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{sen} v, r. \operatorname{sen} u)$$

Comprobar que

$$N \circ f(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u) = -\frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}(u, v)$$

Deducir que $K(f(u, v)) = \dfrac{\cos u}{r(a + r \cos u)}$. Analizar el signo de la curvatura en cada punto de M.

Composición tipográfica: LATEX 2_ε (`http://www.miktex.org`)
Gráficos: Tkpaint (`http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html`)