Investigación Operativa - Optimización Combinatoria

Práctica 6

1. Considere el siguiente problema:

Una empresa tiene una carga de trabajo estacionaria por lo cual tiene que contratar personal por cortos períodos. Sea c_{ij} el costo de contratar a una persona desde principios del mes i hasta principios del mes j $(i < j)$. Se quiere decidir un plan para tres meses consecutivos, a mínimo costo, teniendo en cuenta que en el primer mes se necesita como mínimo b_1 empleados, en el segundo mes b_2 y en el tercer mes b_3.

Muestre que este problema puede plantearse como un problema de flujo de mínimo costo.

2. Considere el siguiente problema:

Una empresa desea contratar k personas para cubrir k puestos ejecutivos. Hay n personas interesadas en ser contratadas $(n \geq k)$, todas ellas altamente capacitadas para cubrir cualquiera de los k puestos. Sea c_{ij} el sueldo pretendido por la persona i para cubrir el puesto j. ¿A qué personas le conviene contratar a la empresa si pretende gastar lo menos posible en sueldos?

Muestre que este problema puede plantearse como un problema de hallar un flujo de mínimo costo en un grafo conveniente.

3. Considere el siguiente problema:

Una empresa alquila camiones para realizar sus entregas, pudiendo optar por tres tipos de alquiler: por tres, cuatro o cinco meses (consecutivos). Se sabe que el alquiler de un camión por tres meses cuesta \$900, por cuatro \$1100 y por cinco \$1400. La empresa ha decidido que en enero del próximo año comprará su propia flota de camiones por lo cual todos los alquileres deben vencer a lo sumo a fines de diciembre, y calcula que necesitará, para hacer sus entregas, 20 camiones en julio, 21 en agosto, 22 en septiembre, 23 en octubre, 20 en noviembre y 24 en diciembre. ¿ Cómo le conviene alquilar los camiones para gastar lo menos posible?

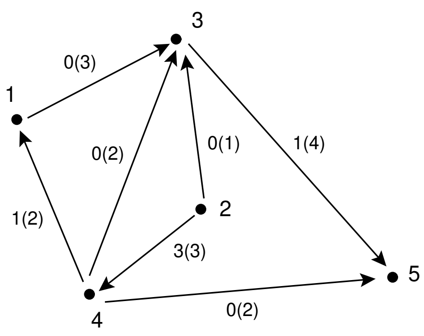
Muestre que este problema puede plantearse como un problema de flujo de mínimo costo.

4. Considere el siguiente problema:

Una empresa que presta el servicio de almuerzo en un colegio estima que utilizará, durante la próxima semana, p_j servilletas el día j $(1 \leq j \leq 5)$. Las servilletas que están sucias el día j pueden enviarse a lavar el día j por la tarde a la lavandería A que cobra \$a por servilleta y las devuelve limpias la mañana del día $j+1$ o a la lavandería B que cobra \$b por servilleta (b < a) pero las devuelve limpias la mañana del día $j+2$. No necesariamente se deben enviar a lavar cada día todas las servilletas que estén sucias. La empresa tiene además la opción de comprar servilletas en cualquier día a \$c cada una. Determinar, para cada día j, cuántas servilletas conviene enviar a lavar en cada una de las dos lavanderías y cuántas conviene comprar si se quiere tener disponibles, por lo menos p_j servilletas para cada día j, de manera que el costo total sea mínimo?

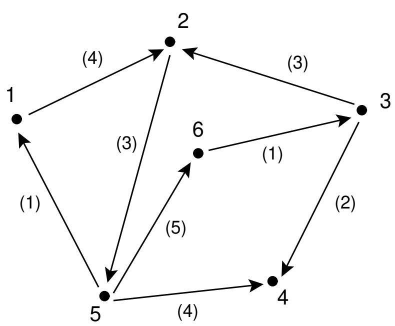
Muestre que este problema puede plantearse como un problema de hallar un flujo de mínimo costo en un grafo conveniente. (Sugerencia: defina un grafo con 11 vértices, 5 para las servilletas sucias, 5 para las limpias y 1 para la compra de servilletas).

5. Considere el grafo $G = (V, E)$



donde en cada rama (i, j) se ha indicado un flujo x_{ij} y, entre paréntesis, su capacidad u_{ij} y donde $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (-1, 3, 1, -2, -1)$ y el costo de las ramas está dado por $c_{13} = 2$, $c_{23} = -1$, $c_{35} = -3$, $c_{24} = -1$, $c_{45} = 3$, $c_{41} = 8$ y $c_{43} = 7$. Probar que el flujo $x = (x_{ij})$ es un flujo de mínimo costo en G mostrando que es factible (es decir, que satisface $x(i, V) - x(V, i) = b_i \ \forall i \in V$ y $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ para cada $(i, j) \in E$) y que el grafo residual no contiene ciclos dirigidos de costo negativo.

6. Sea $G = (V, E)$ el grafo



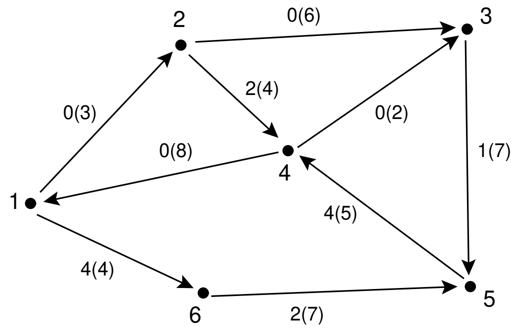
donde en cada rama (i, j) se ha indicado entre paréntesis su capacidad u_{ij}.

i) Dado $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) = (1, 2, 1, -5, 1, 0)$ encuentre, utilizando el algoritmo de Ford-Fulkerson, un flujo que satisfaga $x(i, V) - x(V, i) = b_i \ \forall i \in V$ y $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ para cada $(i, j) \in E$.

ii) Si definimos el costo de las ramas en la forma $c_{12} = -3$, $c_{32} = 3$, $c_{25} = 2$, $c_{63} = -3$,

$c_{54} = -2$, $c_{56} = 7$, $c_{51} = 5$ y $c_{34} = 4$, determine si el flujo hallado en i) es un flujo de mínimo costo, utilizando el algoritmo de Ford-Bellman para ver si el grafo residual contiene ciclos dirigidos de costo negativo.

7. Considere el grafo $G = (V, E)$



donde en cada rama (i, j) se ha indicado un flujo x_{ij} y, entre paréntesis, su capacidad u_{ij}.

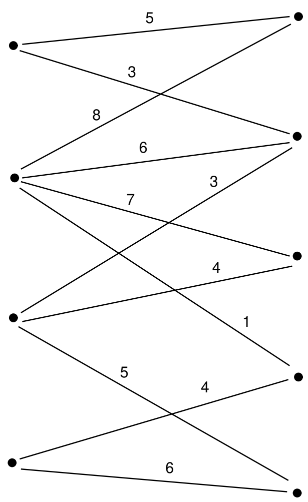
i) Dado $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) = (4, 2, 1, -6, 1, -2)$, verificar que $x = (x_{ij})$ satisface $x(i, V) - x(V, i) = b_i$ para todo $i \in V$ y $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ para cada $(i, j) \in E$.

ii) Si definimos el costo de las ramas en la forma $c_{12} = 3$, $c_{23} = 1$, $c_{16} = 7$, $c_{65} = -3$, $c_{54} = -2$, $c_{24} = 3$, $c_{41} = 5$, $c_{43} = -7$ y $c_{35} = 2$, hallar un flujo de mínimo costo en G utilizando a x como flujo factible inicial.

8. Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito donde $V = P \cup Q$, con $P \cap Q = \emptyset$, un matching M en G se dice *perfecto* si $\forall\, p \in P\ \exists\, q \in Q \,/\, (p, q) \in M$.

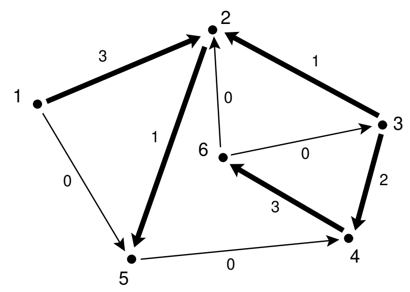
Sea G un grafo bipartito en el cual cada rama e tiene asignado un costo c_e. Si M es un matching en G, definimos el costo de M como la suma de los costos de sus ramas, es decir, $c(M) = \displaystyle\sum_{e \in M} c_e$.

Dado el grafo bipartito no dirigido



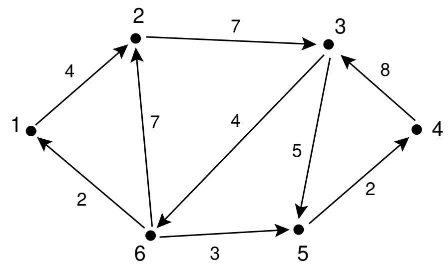
donde en cada rama se ha indicado su costo, hallar un matching perfecto de mínimo costo convirtiendo este problema en un problema de flujo de mínimo costo en un grafo conveniente.

9. Considere el grafo G



donde en cada rama (i, j) se ha indicado un flujo x_{ij}, las ramas no tienen restricciones de capacidad y sus costos están dados por $c_{12} = 3$, $c_{34} = 8$, $c_{32} = 1$, $c_{25} = 2$, $c_{54} = 1$, $c_{15} = -3$, $c_{46} = -5$, $c_{63} = 4$ y $c_{62} = -1$. Dado $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) = (3, -3, 3, 1, -1, -3)$, hallar un flujo de mínimo costo en G por el método "simplex", utilizando la tree solution inicial dada.

10. Considere el grafo G



donde las ramas no tienen restricciones de capacidad y en cada una de ellas se ha indicado su costo. Dado $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) = (1, 3, -1, -2, -2, 1)$, hallar un flujo de mínimo costo en G por el método "simplex". Para hallar una tree solution inicial aplicar la fase 1.

11. Un cierto producto debe ser distribuido desde 4 depósitos a 6 locales. Determinar cuántas unidades se deben despachar de cada depósito a cada local para que el costo total del transporte sea mínimo, sabiendo que la cantidad a_i de unidades disponibles en el depósito i, la cantidad b_j de unidades demandadas por el local j y el costo c_{ij} de transportar una unidad del producto desde el depósito i al local j están dados por

$$a = (18, 22, 39, 14), \qquad b = (10, 11, 13, 20, 24, 15) \text{ y } ||c_{ij}|| = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 13 & 8 & 14 & 19 \\ 15 & 18 & 12 & 16 & 19 & 20 \\ 17 & 16 & 13 & 14 & 10 & 18 \\ 19 & 18 & 20 & 21 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

12. Resolver el ejercicio 10 de la práctica 5 utilizando el método "simplex".