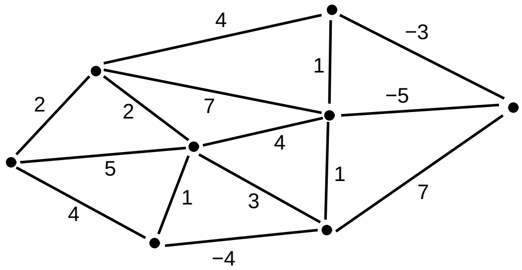
Investigación Operativa - Optimización Combinatoria

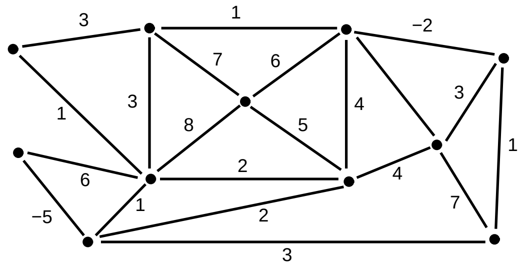
Práctica 4

1. Sea G el grafo



donde para cada rama hemos indicado su peso. Hallar el mínimo spanning tree de G aplicando el algoritmo de Kruskal.

2. Sea G el grafo



donde para cada rama hemos indicado su peso. Hallar el mínimo spanning tree de G aplicando el algoritmo de Prim.

3. Un dado grafo conexo no dirigido G tiene ramas de colores rojo y azul. ¿Cómo se puede hacer para encontrar un spanning tree de G con un máximo número de ramas rojas?

4. Si un grafo conexo no dirigido contiene ramas del mismo peso, el algoritmo de Kruskal puede resultar en diferentes spanning trees mínimos según el criterio que se use para romper el empate al hacer el ordenamiento de las ramas. Mostrar que, dado un spanning tree mínimo, existe un ordenamiento según el cual resulta dicho spanning tree.

5. Calcular la complejidad del algoritmo de Prim y mostrar que este algoritmo es polinomial.

6. Probar que un grafo conexo no dirigido es un árbol sii tiene un único spanning tree.

7. Sea G un grafo no dirigido donde cada rama tiene asignado un peso y sean $e_1, \ldots, e_n$ ramas de G. Considere el siguiente algoritmo:

1. Poner $k = 0$ y $T_k = \emptyset$.
2. Poner $k = k + 1$. Si $k > n$ STOP, en caso contrario poner $T_k = T_{k-1} \cup \{e_k\}$.

3. Si T_k es una foresta ir a 2. Si no, T_k contiene un ciclo $\mathcal{C}$ que contiene a la rama e_k. Elegir una rama e_s de $\mathcal{C}$ que tenga máximo peso, poner $T_k = T_k - \{e_s\}$ e ir a 2.

Determine qué hace este algoritmo y demuéstrelo.

8. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo no dirigido tal que cada rama $e \in E$ tiene asignado un peso w_e y sea T un spanning tree mínimo de G. Si $\mathcal{P}$ es un camino en G, definimos el peso de $\mathcal{P}$ como la suma de los pesos de sus ramas. Analizar la validez de la siguiente afirmación: "$\forall u, v \in V$, $u \neq v$, el único camino $\mathcal{P}$ de u a v en T es un camino de mínimo peso de u a v en G (es decir, el peso de $\mathcal{P}$ es menor o igual que el peso de cualquier otro camino de u a v en G)".

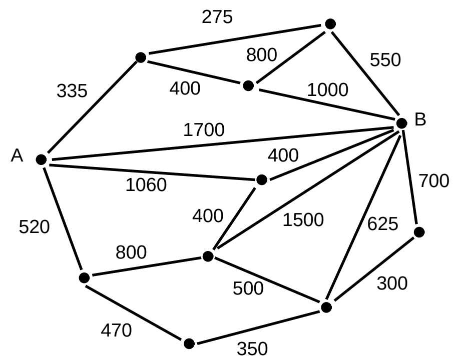
9. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo no dirigido donde cada rama e tiene asignada una capacidad c_e. Si $\mathcal{P}$ es un camino en G definimos la *capacidad mínima* y la *capacidad máxima* de $\mathcal{P}$ en la forma

$$\text{capacidad mínima de } \mathcal{P} = \min\{c_e \,/\, e \in \mathcal{P}\}$$
$$\text{capacidad máxima de } \mathcal{P} = \max\{c_e \,/\, e \in \mathcal{P}\}$$

i) Probar que si T es un mínimo spanning tree de G (considerando a c_e como peso de cada rama e) entonces, para cada par de vértices u y v de G, el único camino $\mathcal{P}$ de u a v en T es un camino de mínima capacidad máxima de u a v en G (es decir, la capacidad máxima de $\mathcal{P}$ es menor o igual que la capacidad máxima de cualquier otro camino de u a v en G).

ii) ¿Cómo haría para hallar, para cada par de vértices u y v de G, un camino $\mathcal{P}$ de máxima capacidad mínima de u a v en G (es decir, tal que la capacidad mínima de $\mathcal{P}$ sea mayor o igual que la capacidad mínima de cualquier otro camino de u a v en G)?

iii) Un señor debe viajar en automóvil de la ciudad A a la ciudad B atravesando una región montañosa. Como tiene problemas de salud que se agravan con la altura, decide tomar la ruta que pase por las regiones más bajas, aún si este fuese el camino más largo.
Determine qué ruta tomará el señor sabiendo que dispone del siguiente mapa, donde se describen los distintos caminos de A a B y se especifica la altura máxima en metros de cada tramo.



10. Sea G un grafo **no dirigido** donde cada rama e tiene asignado un costo $c_e \geq 0$ y sean s y t dos vértices de G. Muestre cómo el problema de hallar un camino de mínimo costo de s a t puede plantearse como el problema de hallar un camino dirigido de mínimo costo de s a t en un grafo dirigido conveniente.

11. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido donde cada rama e tiene asignado un costo c_e y sean A y B dos subconjuntos disjuntos de V. Muestre que el problema de hallar un camino de mínimo costo entre todos los caminos dirigidos que empiezan en algún vértice perteneciente a A y terminan en algún vértice perteneciente a B puede reducirse al problema de hallar un camino dirigido de mínimo costo entre dos vértices en un grafo dirigido conveniente.

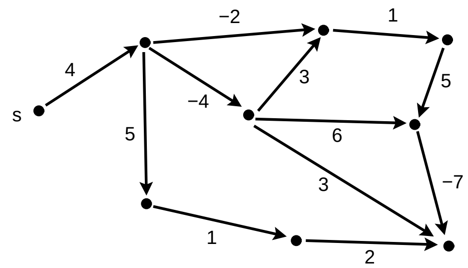
12. Sea G un grafo dirigido donde cada rama e tiene asignado un peso w_e y cada vértice v tiene asignado un peso p_v. Definimos el peso de un camino dirigido en G como la suma de los pesos de sus ramas y de sus vértices. Muestre que los dos siguientes problemas pueden reducirse al problema de hallar un camino dirigido de mínimo costo entre dos vértices en un grafo dirigido conveniente.

i) Hallar un camino de mínimo peso entre dos vértices s y t dados de G.

ii) Hallar, de todos los caminos dirigidos en G que parten de un vértice dado s, uno de mínimo peso.

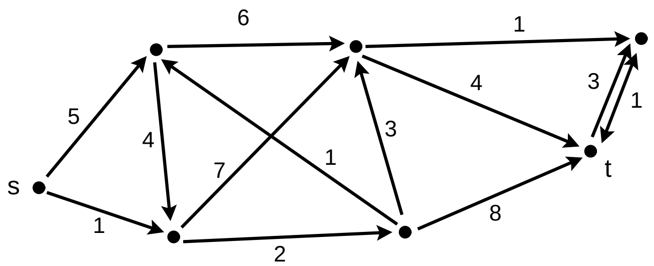
13. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido donde $V = \{1, 2, \ldots, m\}$. Probar que si G no contiene ciclos dirigidos entonces existe una renumeración de sus vértices que satisface $(i, j) \in E \implies i < j$. Describa un algoritmo que encuentre esta renumeración para cualquier G que no contenga ciclos dirigidos.

14. Sea G el grafo



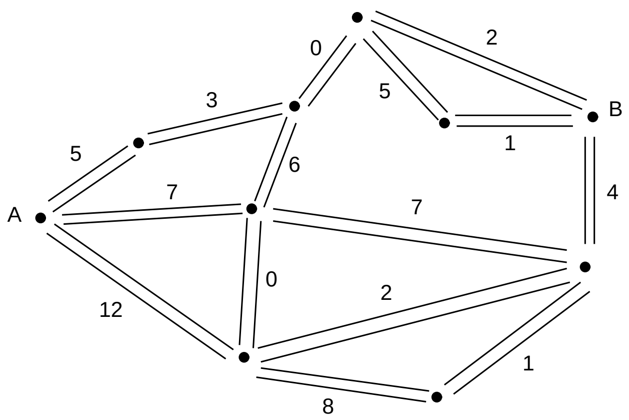
donde para cada rama hemos indicado su costo. Hallar un camino dirigido de mínimo costo de s a v para cada vértice v de G, aplicando el método de programación dinámica.

15. Sea G el grafo



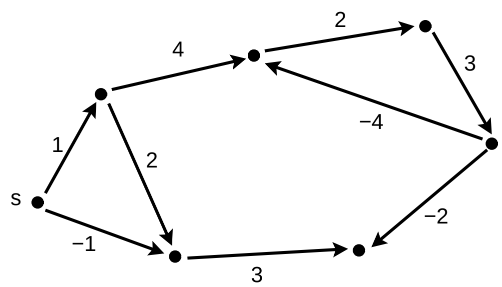
donde para cada rama hemos indicado su costo. Hallar un camino dirigido de mínimo costo del nodo s al nodo t en G, utilizando el algoritmo de Dijkstra.

16. Un camión debe transportar una cierta mercadería de la ciudad A a la ciudad B. En el siguiente mapa se describen todos los posibles caminos de A a B (todos son doble mano) y se ha indicado, para cada tramo, la cantidad de km en mal estado que contiene.



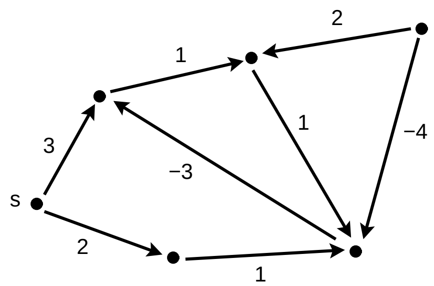
Debido a que el camión es viejo y la mercadería es delicada, el chofer decide que tomará la ruta que contenga la menor cantidad de km en mal estado, aún si fuese la más larga. Determine qué camino le conviene tomar, utilizando el algoritmo de Dijkstra. Además, observando que sólo hay dos tramos que no contienen ningún km en mal estado, determine en qué país se encuentran las ciudades que aparecen en el mapa.

17. Sea G el grafo



donde para cada rama hemos indicado su costo. Hallar un camino dirigido de mínimo costo de s a cada uno de los otros vértices de G, utilizando el algoritmo de Ford-Bellman.

18. Sea G el grafo



donde para cada rama hemos indicado su costo. Hallar un camino dirigido de **máximo** costo de s a cada uno de los otros vértices de G, utilizando el algoritmo de Ford-Bellman.

19. Considere el siguiente problema:

Un proyecto involucra las actividades A, B, C, ... , G. Algunas de estas actividades deben respetar una relación de precedencia (por ejemplo, antes de poder realizar C deben haberse terminado D y E). Además, para cada actividad se conoce su tiempo de ejecución.
Se desea saber cuál es el tiempo mínimo que se necesita para terminar el proyecto sabiendo que para realizar C deben haberse terminado D y E, para realizar D deben haberse terminado A y B, para realizar E deben haberse terminado B y F, para realizar F debe haberse terminado A y para realizar G deben haberse terminado B, C y F y que los tiempos de ejecución de A, B, C, D, E, F y G son 3, 6, 2, 6, 8, 5 y 3 respectivamente.

i) Plantee el problema como un problema de hallar un camino dirigido de mínimo costo entre dos vértices en un grafo conveniente.

ii) Resuelva el problema. ¿Puede hacerlo utilizando el método de programación dinámica? ¿Y utilizando el algoritmo de Dijkstra?

20. Considere el siguiente problema:

Un mochilero ha confeccionado una lista con n productos necesarios para su viaje y, para cada producto j $(1 \leq j \leq n)$ ha fijado un valor unitario $v_j > 0$ y conoce su peso unitario $p_j > 0$. Sabiendo que el peso total de la carga de la mochila no puede superar un dado peso P, desea determinar cuántas unidades de cada producto le conviene llevar para que la carga total de la mochila tenga máximo valor.

Muestre que si $p_1, \ldots, p_n$ y P son enteros y $p_i \neq p_j$ $\forall i \neq j$ entonces este problema puede resolverse hallando, por el método de programación dinámica, un camino dirigido de mínimo costo entre dos vértices en un grafo conveniente que no contiene ciclos dirigidos.
(Sugerencia: considere el grafo cuyos vértices son 0, 1, 2, ... , P y que tiene una rama $i \longrightarrow i + p_j$ para cada i entre 0 y P y cada j entre 1 y n que satisfagan $i + p_j \leq P$, con costo $-v_j$, tome $A = \{0\}$, $B = \{1, 2 \ldots, P\}$ y use el ejercicio 11.)
¿Siempre puede suponerse que $p_1, \ldots, p_n$ y P son enteros? ¿Y que son distintos?