Ejercicios de Grafos - Primera Parte

1. Supongamos que se tienen cuatro aulas y las siguientes materias con sus respectivos horarios para un mismo día:

Álgebra I	8 a 12 hs.
Análisis I	10 a 14 hs.
Análisis II	14 a 18 hs.
Lineal	11 a 15 hs.
Avanzado	12 a 16 hs.
Complejo	9 a 13 hs.
Operativa	14 a 18 hs.
Estadística	14 a 18 hs.

   Decidir si existe una forma de asignar aulas de forma que se puedan dictar todas las materias respetando los horarios. Modelar como un problema de grafos.

2. La secuencia $D = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ se dice gráfica si hay un grafo (simple) con secuencia de grados D.

   (a) Mostrar que $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$ y $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ no son secuencias gráficas.

   (b) Si D es una secuencia gráfica tal que $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ entonces $\sum_{i=1}^{n} d_i$ es par y $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$ para $1 \leq k \leq n$.

   (c) (difícil) Probar que vale la reciproca del item anterior, es decir, si se tiene una secuencia D que verifica esas condiciones entonces es una secuencia gráfica.

3. Decidir si existe un grafo G tal que $G \cong \overline{G}$.

4. (a) Dibujar todos los grafos conexos de 4 vértices (salvo isomorfismo).

   (b) Dibujar todos los grafos conexos de 5 vértices (salvo isomorfismo). Hint: 21

5. (a) Caracterizar la matriz de adyacencia de un grafo bipartito.

   (b) Probar que un grafo es bipartito si y sólo si para todo n impar los elementos de la diagonal de A^n son nulos (A es la matriz de adyacencia del grafo).

6. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Probar que si G no es conexo entonces $\overline{G}$ tiene un subgrafo bipartito completo $H = (V', E')$. Demostrar que puedo tomar $V = V'$.

7. Probar que un grafo $G = (V, E)$ es conexo si y sólo si para toda partición de V en dos subconjuntos V_1 y V_2 ($V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$) hay un arco de G que une un punto de V_1 con uno de V_2 .

8. Probar que un grafo de n vértices que tiene más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas es conexo.

9. Probar que en un grafo conexo cualquier par de caminos simples de longitud máxima tienen un vértice en común.