Ejercicios de Grafos - Segunda Parte

1. Escribir en pseudocódigo el algoritmo de Prim y estimar su complejidad en el peor caso.

2. Probar que si un grafo posee un único árbol generador entonces es un arbol.

3. Sea T un árbol generador mínimo determinado por el algoritmo de Prim. Probar que T tiene todas las aristas de longitud mínima salvo que estas incluyan un circuito.

4. Escribir en pseudocódigo un algoritmo para calcular un camino euleriano. Demostrar que dicho algoritmo es correcto.

5. Probar que un grafo dirigido tiene un circuito euleriano orientado si y solo si $d_{in}(v) = d_{out}(v)$ para todo vertice v.

6. Un digrafo G se dice completamente conexo si cada par de vértices está conectado con exactamente una arista orientada en una de las dos posibles direcciones. Probar que si un digrafo G es completamente conexo entonces tiene un ciclo hamiltoniano orientado.

7. (a) Sea G un grafo y u y v dos nodos no adyacentes tal que $d(u)+d(v) \geq n$. Probar que G es hamiltoniano si y solo si G mas la arista uv es hamiltoniano.

   (b) Probar que si G verifica que $d(u) \geq \frac{n}{2}$ para todo vértice v entonces G es hamiltoniano.

8. Una legislatura provincial tiene 23 comisiones distintas. Cada comisión debe reunirse una hora por semana. Se quiere establecer un horario semanal de reuniones que use el menor número posible de horas en total, para dejar el mayor tiempo libre posible para otras actividades. La única restricción es que un legislador no puede estar en dos reuniones al mismo tiempo. Modelar el problema como un problema de coloreo de grafos.

9. Probar que si $d_1, \cdots, d_n$ es la secuencia de grados de G entonces $\chi(G) \leq \max_i\{\min\{d_i + 1, i\}\}$

10. Analizar el siguiente algoritmo para colorear un grafo:

    - Dado un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ poner $f(v_1) = 1$.
    - Para $i = 2, \cdots, n$ poner

    $$f(v_i) = \min\{k \in \mathbb{N} : f(v_j) \neq k \ \forall j < i \text{ con } v_j \in \mathcal{N}(v_i)\}.$$

- Fin.

Determinar la complejidad de este algoritmo. Demostrar que existe una forma de rotular los vertices de G de manera que el algoritmo consiga un coloreo mínimo.