Investigación Operativa - Optimización Combinatoria

Práctica 1

1. Un dietista está planeando el menú de la comida de una escuela primaria. Proyecta servir tres alimentos principales, todos ellos con distinto contenido nutricional, de manera que se suministre al menos la ración diaria mínima (RDM) de vitaminas A, C y D en una comida. En la siguiente tabla se sintetiza el contenido vitamínico y el costo por cada 30g de los tres tipos de alimento.

	Vitamina A	Vitamina C	Vitamina D	Costo
Alimento 1	30mg	10 mg	40 mg	0.15
Alimento 2	20mg	15 mg	30 mg	0.10
Alimento 3	40mg	5 mg	20 mg	0.12
RDM	300mg	120 mg	210 mg	

Cualquier combinación de ellos puede seleccionarse, con tal de que el tamaño total de la porción sea de por lo menos 225g.
Plantear un problema de programación lineal que, al ser resuelto, determine la cantidad que debe servirse de cada alimento sabiendo que el objetivo es reducir al mínimo el costo de la comida y teniendo en cuenta que se deben alcanzar los niveles de las raciones mínimas de las tres vitaminas y se debe respetar la restricción relativa al tamaño mínimo de la porción.

2. Se cuenta con un presupuesto de mil millones de pesos para otorgarlos como subsidio destinado a la investigación innovadora en el campo de la búsqueda de otras formas de producir energía. Se seleccionaron seis proyectos. En la siguiente tabla figuran la utilidad neta que se obtendrá por cada peso invertido en el proyecto así como el nivel requerido de financiamiento (en millones de pesos).

Proyecto	Clasificación	Utilidad neta	Financiamiento
1	Solar	4.4	220
2	Solar	3.8	180
3	Comb. sintéticos	4.1	250
4	Carbón	3.5	150
5	Nuclear	5.1	400
6	Geotérmico	3.2	120

Además se ha resuelto financiar por lo menos el 50% del proyecto de energía nuclear y como mínimo 300 millones de pesos de los proyectos de energía solar. Plantear el problema sabiendo que el objetivo es maximizar los beneficios netos.

3. Poner en forma standard los siguientes problemas de programación lineal:

i) $\max\ 3x_1 + x_2 - 3x_3$

$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 5$

$2x_1 - x_3 \geq 2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

ii) $\min\ x_1 - 2x_2 + 3x_4$

$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$

$2x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 1$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$

iii) $\max\ 3x_1 - 2x_2 - x_3$

$x_1 + 3x_2 = 4$

$2x_1 - x_3 \geq 2$

$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

4. Muestre que si en un problema de programación lineal n variables no tienen restricciones de signo se las puede reemplazar por $n + 1$ variables no negativas.

5. Resolver gráficamente los problemas

i) $\max\ 3x_1 + 2x_2$

$x_1 + 3x_2 \leq 4$

$2x_1 - x_2 \leq 2$

$(x_1, x_2) \geq 0$

ii) $\min\ 3x_1 - 2x_2$

$x_1 + 3x_2 \leq 4$

$2x_1 - x_2 \leq 2$

$(x_1, x_2) \geq 0$

iii) $\max\ 3x_1 - 2x_2$

$x_1 + 3x_2 \leq 4$

$2x_1 - x_2 \geq 2$

$(x_1, x_2) \geq 0$

6. Plantear y resolver gráficamente los siguientes problemas

i) Una empresa fabrica dos productos, A y B, los cuales deben procesarse en los departamentos 1 y 2. El producto A requiere 3 horas de trabajo por unidad en el departamento 1 y 2 horas por unidad en el departamento 2 y el producto B requiere 4 horas por unidad en el departamento 1 y 6 horas por unidad en el departamento 2. Se sabe que los departamentos 1 y 2 tienen 120 y 260 horas semanales de capacidad de trabajo respectivamente y que los productos A y B dejan un margen de utilidad de \$5 y \$6 por unidad respectivamente. Determinar el número de unidades que hay que fabricar de cada producto si se quiere maximizar el margen de utilidad.

ii) Es necesario alimentar racionalmente un rebaño, para lo cual la alimentación debe contener imprescindiblemente cuatro componentes nutritivos A, B, C y D. En el comercio se encuentran disponibles dos alimentos M y N con las siguientes propiedades:
a) Un kg. de alimento M contiene 100g de A, 100g de C y 200g de D.
b) Un kg. de alimento N contiene 100g de B, 200g de C y 100g de D.
Además, cada animal debe consumir al día 400g de A, 600g de B, 2000g de C y 1700g de D como mínimo. Si el alimento M cuesta \$10 el kilo y el alimento N cuesta \$ 4 el kilo, ¿cuántos kilos de M y N deben suministrarse a cada animal diariamente para que la ración sea más económica?

7. Demostrar que el problema de minimizar cx sujeto a $Ax = b$ carece de interés porque sobre $\{x \,/\, Ax = b\}$ no existe el mínimo de cx o bien cx es constante.

8. Dar un ejemplo donde las condiciones $Ax \leq b$ y $x \geq 0$ no sean factibles, es decir, no exista x que las satisfaga.

9. Probar que el conjunto $\{x \,/\, Ax = b \text{ y } x \geq 0\}$ es convexo.

10. Dados los problemas

$$\begin{aligned} &\min\, cx \\ &Ax = b \qquad (1) \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\max\, yb \\ &yA \leq c \qquad (2) \end{aligned}$$

i) Demostrar que

a) si x es una solución factible de (1) e y es una solución factible de (2) entonces $yb \leq cx$

b) si (1) es factible pero cx no tiene cota inferior entonces (2) no es factible.

ii) Dar un ejemplo donde ni (1) ni (2) sean factibles.

11. Probar que el problema dual del problema dual es el problema original.

12. Dados los problemas (llamados simétricos)

$$\begin{aligned} &\max\, cx \\ &Ax \leq b \qquad (1) \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\min\, yb \\ &yA \geq c \qquad (2) \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

i) Demostrar que son duales.

ii) Enunciar y demostrar el teorema de holgura complementaria para este caso.

13. Sean $A = ||a_{ij}|| \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que al hacer una transformación con pivote en a_{rs} en la matriz $[A \,|\, b]$ obtenemos la matríz $[A' \,|\, b']$. Hallar una matriz cuadrada C de $m \times m$ tal que $C.A = A'$ y $C.b = b'$.

14. Probar que al hacer una transformación pivote en un sistema canónico se obtiene otro sistema canónico.

15. Aplicar tres transformaciones pivote para conseguir el siguiente pasaje

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

16. Resolver, aplicando el simplex, los problemas

i) $\min\, x_2 - 3x_3 + 2x_5$

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 2 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\ x \geq 0 \end{gathered}$$

ii) $\min\, x_1 - 2x_2 - 8x_5$

$$\begin{gathered} -2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_6 = 7 \\ 6x_2 + x_4 = 3 \\ x \geq 0 \end{gathered}$$

17. Poner en forma standard y luego resolver, aplicando el simplex, los problemas

i)
$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 1 \\ & -4x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} \min\ & x_1 - 2x_3 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_3 \geq -3 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

18. Muestre que el problema

$$\begin{gathered} \min |x| + |y| + |z| \\ x + y \leq 1 \\ 2x + z = 3 \end{gathered}$$

puede resolverse aplicando el simplex a un problema de programación lineal conveniente.