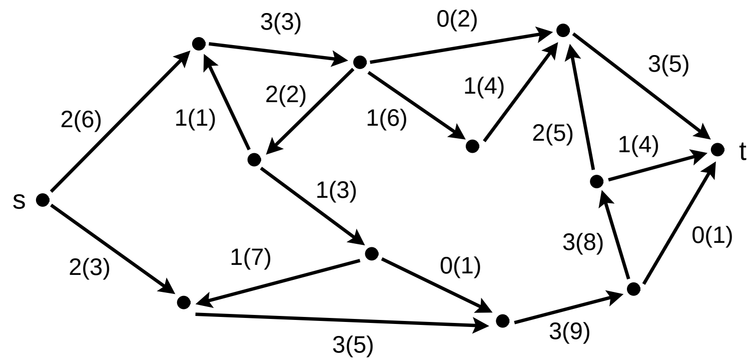
Investigación Operativa - Optimización Combinatoria

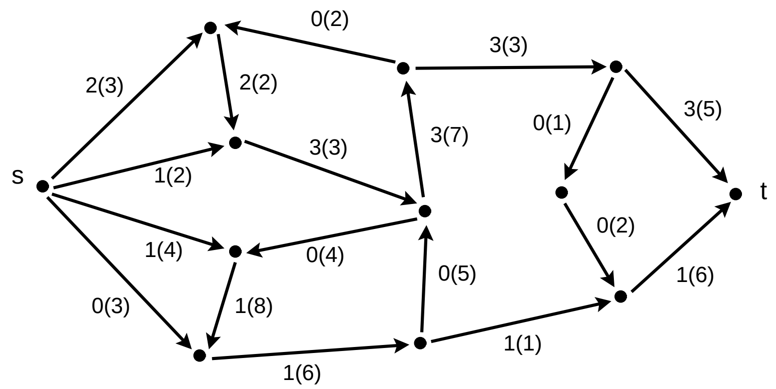
Práctica 5

1. Verificar que el flujo dado es un flujo factible y determinar si es óptimo para cada uno de los siguientes grafos en los cuales en cada rama se indica su flujo y, entre paréntesis, su capacidad.

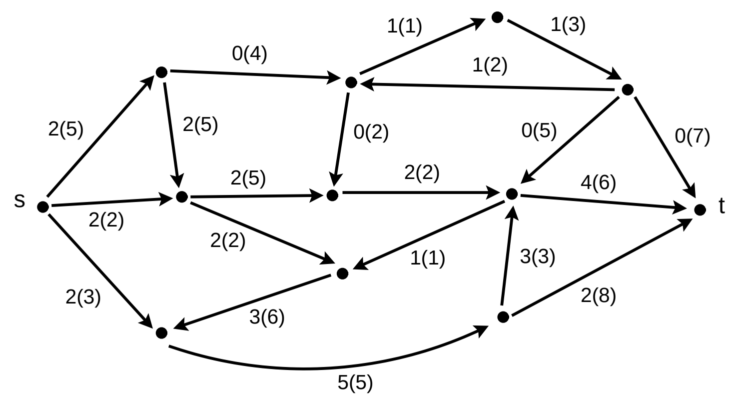
a)



b)



c)



2. Para cada uno de los grafos del ejercicio 1 tal que el flujo dado no sea óptimo hallar, utilizando el algoritmo de Ford-Fulkerson, un flujo óptimo y su correspondiente mínimo corte tomando como flujo inicial

i) $x = 0$

ii) el flujo dado

3. Plantee el siguiente problema como un problema de máximo flujo y resuélvalo utilizando el algorimto de Ford-Fulkerson:

Un depósito almacena tres tipos de productos para abastecer a tres localidades. Supongamos que en este momento el distribuidor tiene en stock 5 toneladas del producto 1, 2 toneladas y media del producto 2 y 4 toneladas y media del producto 3 y que dispone de un camión con 5 toneladas de capacidad para enviar a la localidad 1, de un camión con 6 toneladas de capacidad para enviar a la localidad 2 y de un camión con 2 toneladas y media de capacidad para enviar a la localidad 3. Determinar cuál es la máxima cantidad de toneladas que puede entregar de las 13 toneladas que le fueron demandadas en total, sabiendo que la cantidad de toneladas t_{ij} del producto i demandadas por la localidad j está dada por

$$\begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. i) Sea G un grafo dirigido y sean u y v dos vértices distintos de G tales que existe al menos un camino dirigido de u a v en G. Probar que el máximo número de caminos dirigidos de u a v en G que son disjuntos por ramas (es decir, tales que toda rama pertenezca a lo sumo a uno de ellos) es igual al mínimo número de ramas que hay que sacar a G para que en el grafo resultante (que tiene los mismos vértices que G pero menos ramas) no exista ningún camino dirigido de u a v.

ii) Sea G un grafo dirigido y fuertemente conexo. Describa un algoritmo que halle el mínimo número de ramas que hay que sacar a G para que deje de ser fuertemente conexo.

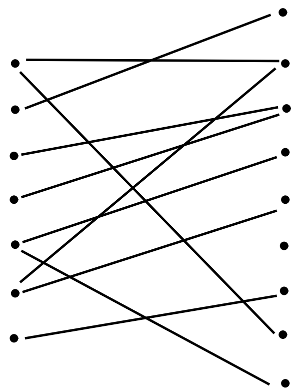
iii) Sea G un grafo no dirigido y conexo. Describa un algoritmo que halle el mínimo número de ramas que hay que sacar a G para que deje de ser conexo.

iv) Sea G un grafo dirigido y conexo. Describa un algoritmo que halle el mínimo número de ramas que hay que sacar a G para que deje de ser conexo.

5. Sea G un grafo dirigido y sean u y v dos vértices distintos de G tales que existe al menos un camino dirigido de u a v en G. ¿Cómo se puede hallar el máximo número de caminos dirigidos de u a v en G que son disjuntos por vértices (es decir, tales que todo vértice distinto de u y v pertenezca a lo sumo a uno de ellos)?

6. Un pueblo tiene r residentes, q clubes y n partidos políticos $P_1, \ldots P_n$. Cada residente es socio de por lo menos un club, y está afiliado a un único partido político. Se quiere formar un consejo de representantes de los clubes que no contenga más de u_k miembros del partido P_k $(1 \leq k \leq n)$, para lo cual cada club debe seleccionar uno de sus socios para integrar el consejo, pero dos clubes distintos no pueden seleccionar a la misma persona. Suponiendo que para cada residente conociera los clubes de los que es socio y a cuál partido político está afiliado, ¿cómo haría para determinar si el problema es factible?

7. Hallar un máximo matching y un mínimo cover en el grafo bipartito



8. Se deben realizar 6 tareas en 5 días. La tarea A requiere 7 horas para su ejecución y debe realizarse entre los días 2 y 4, la tarea B requiere 9 horas y debe realizarse entre los días 1 y 3, la tarea C requiere 10 horas y debe realizarse entre los días 4 y 5, la tarea D requiere 5 horas y debe realizarse entre los días 3 y 5, la tarea E requiere 13 horas y debe realizarse entre los días 1 y 3 y la tarea F requiere 26 horas para su ejecución y debe realizarse entre los días 2 y 5.
Sabiendo que para cada uno de los primeros cuatro días se dispone de 16 horas y que para el quinto día se dispone de 8 horas, determinar (si es posible) cuántas horas de cada día debe asignarse a cada tarea para que todas las condiciones sean satisfechas.

9. En un torneo 6 equipos juegan todos contra todos una sola vez. Supongamos que no se permiten empates. Determinar (si existe) una asignación de resultados a los partidos de manera tal que, al terminar el torneo, la cantidad de partidos ganados por los equipos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sea 5, 2, 1, 2, 1 y 4 respectivamente.

10. Un cierto producto debe ser distribuido desde 4 depósitos a 6 locales. Determinar cuántas unidades se deben despachar de cada depósito a cada local para que el costo total del transporte sea mínimo, sabiendo que la cantidad a_i de unidades disponibles en el depósito i, la cantidad b_j de unidades demandadas por el local j y el costo c_{ij} de transportar una unidad del producto desde el depósito i al local j están dados por

$$a = (3, 4, 2, 8), \quad b = (3, 3, 6, 2, 1, 2) \text{ y } ||c_{ij}|| = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 12 & 4 & 7 & 11 \\ 2 & 8 & 3 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 8 & 10 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$