INVESTIGACIÓN OPERATIVA
Segundo Cuatrimestre — 2012

Práctica 1: Modelado y Complejidad

1. Consideremos el siguiente problema

$$
\begin{aligned}
\min\ z = \ & \max\{f_1(x), \cdots, f_l(x)\} \\
\text{s.a.}\quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

donde $f_1 \cdots f_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones lineales. Resuelva este problema modelandolo como un problema de programación lineal conveniente.

2. Consideremos el siguiente problema

$$
\begin{aligned}
\min\ z = \ & f(x, y) \\
\text{s.a.}\quad & x \neq y \\
& x, y \in \mathbb{Z} \\
& |x|, |y| \leq M
\end{aligned}
$$

para $M \in \mathbb{Z}_{>0}$ dato y f una función lineal. Modelar como un problema de programación lineal entera.

3. (*a*) Sean x, y y z variables *binarias* (pueden valer 1 o 0). Consideremos la fórmula

$$P := x \vee (y \wedge \neg z).$$

Encuentre un conjunto de restricciones lineales sobre x, y, z y algunas variables extra cuyas soluciones factibles enteras se correspondan con los valores de x, y y z que hagan verdadero a P.

†(*b*) Pruebe que decidir si un problema de programación lineal entera tiene alguna solución factible es NP-completo.

4. Un dietista está planeando el menú de la comidad de una escuela. Proyecta servir tres alimentos principales, todos ellos con distinto contenido nutricional, de manera que se suministre al menos la ración diaria mínima (RDM) de vitaminas A, C y D en una comida. En la siguiente tabla se sintetiza el contenido vitamínico y el costo por dia por cada 30 gramos de los tres tipos de alimento.

	Vitamina A	Vitamina C	Vitamina D	Costo
Alimento 1	30mg	10mg	40mg	0.15
Alimento 2	20mg	15mg	30mg	0.10
Alimento 3	40mg	5mg	20mg	0.12
RDM	300mg	120mg	210mg	

Cualquier combinación de ellos puede seleccionarse, con tal de que el tamaño total de la porción sea de por lo menos 225g.

Plantear un problema de programación lineal que, al ser resuelto, determine la cantidad que debe servirse de cada alimento sabiendo que el objetivo es reducir al mínimo el costo de la comida y teniendo en cuenta que se deben alcanzar los niveles de las raciones mínimas de las tres vitaminas y se debe respetar la restricción relativa al tamaño mínimo de la porción.

5. Se cuenta con un presupuesto de mil millones de pesos para otorgarlos como subsidio destinado a la investigación innovadora en el campo de la búsqueda de otras formas de producir energía. Se seleccionaron seis proyectos. En la siguiente tabla figuran la utilidad neta que se obtendrá por cada peso invertido en el proyecto así como en nivel requerido de financiamiento (en millones de pesos).

Proyecto	Clasificación	Utilidad neta	Financiamiento
1	Solar	4.4	220
2	Solar	3.8	180
3	Comb. sintéticos	4.1	250
4	Carbón	3.5	150
5	Nuclear	5.1	400
6	Geotérmico	3.2	120

Además se ha resuelto financiar por lo menos el 50% del proyecto de energía nuclear y como mínimo 300 millones de pesos de los proyectos de energía solar. Plantear el problema sabiendo que el objetivo es maximizar los beneficios netos.

6. El intendente de una ciudad del interior de Argentina ha decidido relocalizar todos los colegios de modo de hacer más cómoda la movilidad de los alumnos.

La ciudad se puede dividir en I distritos, cada uno contiene p_i alumnos. Análisis preliminares (estudios de terrenos, factores políticos, etc.) han establecido que las escuelas sólo pueden ser ubicadas en J sitios predeterminados dentro de la ciudad.

Sea $d_{ij} \geq 0$ la distancia desde el centro del distrito i hasta el sitio j. Se deben seleccionar los sitios en los cuales construir un colegio (en un sitio cabe a lo más uno) y además se debe asignar un colegio a cada distrito. Es decir, cada distrito de la ciudad debe tener uno (y sólo un) colegio asociado. En cambio, cada colegio puede tener hasta 2 distritos asociados. Además, si un colegio fue construido, al menos 1 distrito tiene que serle asignado.

Construir un colegio en el sitio j tiene un costo fijo asociado igual a c_j. Existe también un costo variable que es linealmente proporcional (la constante de proporcionalidad es f) a la cantidad total de alumnos a que debe servir el colegio. O sea, si se construye un colegio en el sitio j, entonces el costo asociado es $c_j + f s_j$, donde s_j es la población total a que debe servir el colegio ubicado en j (cuidado que s_j no es un dato previo sino que es la suma de las poblaciones de los distritos asociados a ese colegio).

La capacidad de alumnos que soporta un colegio construido en el sitio j es un dato conocido (T_j).

El presupuesto total destinado para construir los colegios es igual a B y no debe ser sobrepasado.

Además, la Dirección de Educación de la ciudad ha determinado que los distritos s y t deben ser atendidos por 2 colegios distintos.

Ayude al Intendente a aumentar su popularidad formulando un problema de programación lineal mixto, que, respetando las condiciones planteadas, determine dónde construir los colegios y qué colegio atiende a qué distrito. El objetivo es minimizar la distancia máxima entre el centro de un distrito y su respectivo colegio.

7. Se quieren recorrer N ciudades numeradas $1, \cdots, N$. Es necesario empezar por la primer ciudad y recorrer todas las ciudades pasando una sola vez por cada una. Al final del recorrido se debe volver a la primer ciudad. Se conoce la matriz D de distancias entre las ciudades (D_{ij} es la distancia entre la ciudad i y la ciudad j. Formular un problema de programación lineal entera para calcular la forma de hacer el recorrido que minimice la distancia total recorrida.

8. Hacer un modelo de programación lineal entera para resolver el *sudoku*.

9. Para cada una de las siguientes operaciones estimar la cantidad máxima de sumas, multiplicaciones y divisiones que deben realizarse. Expresar el resultado usando la notación de la "O".

(a) Sumar dos matrices de $n \times n$.

(b) Multiplicar dos matrices de $n \times n$.

(c) Invertir una matriz inversible de $n \times n$.

(d) Resolver un sistema $Ax = b$ para A y b dados.

(e) Multiplicar dos polinomios de grado n.

10. Escribir, mediante *pseudocódigo*, un algoritmo para ordenar una lista de números. Estimar la cantidad de comparaciones ($<$, $>$ o $=$) necesarias.

Stephen Arthur Cook
1939

Cook ha hecho contribuciones muy importantes en el campo de la teoría de la complejidad.