Lógica y Computabilidad
Práctica 1: Cálculo Proposicional

Notaciones:

a) Si X es un conjunto, $\#X$ denota su cardinal.

b) F denota el conjunto de todas las fórmulas del cálculo proposicional.

c) Si $\alpha \in F$, $c(\alpha)$ denota la complejidad de α y $cb(\alpha)$ denota la complejidad binaria de α.

d) Si $\alpha \in F$, $s(\alpha)$ denota el conjunto de subfórmulas de α.

e) Si $\alpha \in F$, $Var(\alpha)$ denota el conjunto de variables proposicionales que figuran en α, $\#VarR(\alpha)$ es el número de variables que figuran en α contadas tantas veces como aparecen.

Ejercicio 1 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas del cálculo proposicional. En caso afirmativo encontrar una cadena de formación de tales fórmulas.

a) $(p_1 \vee p_2) \to p_3$

b) $((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \to p_4)$

c) $((\neg\neg p_1 \to p_1) \to p_2)$

d) $p_1 \vee (\neg p_1)$

e) $((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_5 \to p_2))$

Ejercicio 2 Probar que si α es una fórmula del cálculo proposicional, entonces α admite infinitas cadenas de formación.

Ejercicio 3 Sea $\alpha \in F$. Probar que si β es una subfórmula de α, entonces β aparece en toda cadena de formación de α.

Ejercicio 4 Mostrar que si $n \in \mathbf{N}, n \neq 0$, entonces existe $\alpha \in F$ tal que $\#s(\alpha) = n$.

Ejercicio 5 Para cada una de las siguientes fórmulas α encontrar todas las cadenas de formación minimales de α y enumerar el conjunto de subfórmulas de α.

a) $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$

b) $\alpha = ((p_1 \to (p_5 \to p_2)) \to (\neg p_1 \to \neg p_2))$

c) $\alpha = ((\neg p_1 \vee p_5) \vee (p_1 \wedge \neg p_2))$

Ejercicio 6 (*) Probar que si α es una fórmula, C es una cadena de formación minimal de α y β es un eslabón de C, entonces β es subfórmula de α.

Ejercicio 7 Sea $\alpha \in F$. Probar las siguientes relaciones:
a) $\#VarR(\alpha) = cb(\alpha) + 1$.

b) $\#Var(\alpha) \leq cb(\alpha) + 1$.

Ejercicio 8 Sea α una fórmula. Probar que $\#s(\alpha) \leq c(\alpha) + \#VarR(\alpha)$.

Ejercicio 9 Dadas las siguientes fórmulas decidir si son tautologías, contingencias o contradicciones.

a) $\alpha = ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3)))$

b) $\alpha = ((p_1 \to \neg p_1) \wedge (\neg p_1 \to p_1)$.

c) $\alpha = (\beta \to (\beta \to \gamma)), \beta, \gamma \in F$.

d) $\alpha = \neg((p_1 \to \neg p_1) \vee (\neg p_1 \to p_1))$

e) $\alpha = \neg\beta$, donde β es una contingencia.

Ejercicio 10 Para cada una de las siguientes tablas de verdad, representadas en términos de funciones booleanas, encontrar una fórmula que las represente.

a) $f : \mathbf{2}^2 \to \mathbf{2}$ es la función definida por $f(0,0) = f(1,1) = 1, f(1,0) = f(0,1) = 0$.

b) $f : \mathbf{2}^3 \to \mathbf{2}$ es la función definida por $f(0,0,0) = f(1,0,0) = f(1,1,0) = 1$ y f toma el valor 0 en los demás vectores.

Ejercicio 11 Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si α y β son tautologías, entonces $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología.

b) Si $(\alpha \to \beta)$ es tautología, entonces β es tautología o α es contradiccción.

c) Si α y β son fórmulas, entonces $(\alpha \vee \beta)$ es contingencia si y sólo si α es contingencia o β es contingencia.

d) Si α y β son contingencias, entonces $(\alpha \to \beta)$ es contingencia.

Ejercicio 12. Dadas las siguientes fórmulas, encontrar todas las valuaciones que las satisfacen.

a) $\alpha = ((p_1 \to p_2) \vee p_1)$.

b) $\alpha = ((p_1 \to p_2) \to p_2)$.

c) $\alpha = ((p_1 \to p_3) \to \neg p_3)$.

Ejercicio 13 Probar que si α es una fórmula satisfactible, entonces existen infinitas valuaciones que la satisfacen.

Ejercicio 14. Encontrar un ejemplo de una fórmula α tal que $Var(\alpha) = \{p_1, p_2, p_3\}$ que tenga la siguiente propiedad: si v es una valuación, entonces $v(\alpha) = 1$ si y sólo si $v(p_1) = 1$.

Ejercicio 15 (*) Encontrar un ejemplo de una fórmula α tal que $Var(\alpha) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y que tenga la siguiente propiedad: existen 2^n valuaciones que satisfacen a α y que toman el valor 0 en las variables proposicionales p_i para todo $i \geq n + 1$. Más generalmente, dado un número k entre 1 y 2^n, mostrar que existe $\alpha \in F$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y tal que el número de valuaciones que satisfacen a α y que toman el valor 0 en las variables que no figuran en α es igual a k.

Ejercicio 16) Sean α, β fórmulas tales que $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$. Probar que $(\alpha \to \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción o β es tautología. ¿Qué sucede si α y β tienen variables en común?.

Ejercicio 17 (*) Sea $\alpha \in F$ tal que $Var(\alpha) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n$ fórmulas arbitrarias.

a) Definir inductivamente la noción de sustituir en α las variables proposicionales $p_1, \ldots, p_n$ por $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Sea $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tal sustitución.

b) Probar que α es tautología si y sólo si $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es tautología cualesquiera sean las fórmulas $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

Ejercicio 18. Sea $\alpha \in F$ tal que toda variable proposicional figura a lo sumo una vez en α. Probar que α es contingencia. Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si alguna variable aparece más de una vez en α,

Ejercicio 19. Decidir si los siguientes conectivos son adecuados.

a) $\{\vee, \to\}$, b) $\{\vee, \wedge\}$, c) $\{\vee, \Leftrightarrow\}$, d) $\{\vee, \neg\}$, e) $c(p_1, p_2, p_3)$ es el conectivo ternario definido por $c(p_1, p_2, p_3) = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

Ejercicio 20. Dadas las siguientes fórmulas, encontrar los circuitos que las represente. Decidir en cada uno de estos casos, si los circuitos hallados son los óptimos, en caso contrario, encontrar el circuito equivalente óptimo.

a) $\alpha = (p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_2))$

b) $\alpha = (p_2 \vee (p_1 \wedge p_3))$

c) $\alpha = (((p_3 \wedge \neg p_1) \wedge \neg p_2) \vee ((p_3 \wedge (p_2 \wedge \neg p_1)) \vee \neg p_3))$