Lógica y Computabilidad

Práctica 2: Cálculo Proposicional

Notación: Si Γ es un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional, $C(\Gamma)$ denota el conjunto de fórmulas que son consecuencias de Γ. Si $\alpha, \beta \in F$, $\equiv$ es la relación de equivalencia: $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda valuación v.

Ejercicio 1. Sea $F/\equiv$ el conjunto cociente asociado a la relación de equivalencia $\equiv$. Probar que la relación $\leq$ definida en $F/\equiv$ por la fórmula: $|\alpha| \leq |\beta|$ si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología está bien definida y es una relación de orden. Probar que con esta relación de orden, $F/\equiv$ es un álgebra de Boole. ($|\alpha|$ denota la clase de equivalencia de α, cualquiera sea $\alpha \in F$.)

Ejercicio 2. Probar que si n es un número natural, entonces $F_n/\equiv$ es un álgebra de Boole finita, donde $F_n/\equiv$ es el conjunto de clases de equivalencias de fórmulas en $F/\equiv$ cuyas variables proposicionales están incluídas en $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$. ¿Qué cardinal tiene $F_n/\equiv$?.

Ejercicio 3. Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfactibles:

a) $\Gamma = \{p_1, (p_1 \rightarrow p_2), \neg p_2\}$.

b) Γ es el conjunto de variables proposicionales.

c) Γ es el conjunto de todas las contingencias.

d) Γ es el conjunto de todas las tautologías.

Ejercicio 4. Decidir si $\alpha \in C(\Gamma)$ en los siguientes casos:

a) $\Gamma = \{p_1, (p_1 \rightarrow p_2)\}, \alpha = p_2$.

b) $\Gamma = \{p_1, (\neg p_1 \rightarrow p_2\}, \alpha = p_2$.

c) Γ es cualquier conjunto insatisfactible de fórmulas, $\alpha \in F$ es arbitraria.

d) Γ es arbitrario, α es tautología.

Ejercicio 5. Probar las siguientes propiedades, donde $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ son conjuntos arbitrarios de fórmulas.

a) $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$.

b) $C(C(\Gamma)) = C(\Gamma)$.

c) $C(F) = F$.

d) $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ implica $C(\Gamma_1) \subseteq C(\Gamma_2)$.

Ejercicio 6. Decidir si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas, donde $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq F$. En caso de ser falsas encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre Γ_1 y Γ_2 para que sean verdaderas.

a) $C(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = C(\Gamma_1) \cup C(\Gamma_2)$.

b) $C(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = C(\Gamma_1) \cap C(\Gamma_2)$.

c) Si $C(\Gamma_1) = \Gamma_2$ y $C(\Gamma_2) = \Gamma_1$ entonces $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Ejercicio 7. Sea Γ un conjunto de fórmulas. Probar que Γ es satisfactible si y sólo si $C(\Gamma)$ es satisfactible. ¿Es cierta esta equivalencia cambiando la propiedad satisfactible por insatisfactible?.

Ejercicio 8. Encontrar un conjunto Γ satisfactible de fórmulas tal que para toda fórmula α, $\alpha \in C(\Gamma)$ o $\neg\alpha \in C(\Gamma)$.

Ejercicio 9. Diremos que un conjunto de fórmulas Γ es *independiente* si para cada fórmula $\phi \in \Gamma, \phi \notin C(\Gamma \backslash \{\phi\})$. En caso contario, Γ se dice *dependiente*.

a) Probar que para cada número natural k, existe un conjunto Γ independiente de cardinal k.

b) Dar ejemplos de conjuntos infinitos de fórmulas independientes.

Ejercicio 10. Sea Γ un conjunto de fórmulas.

a) Probar que si Γ es independiente y $\Sigma \subseteq \Gamma$, entonces Σ es independiente.

b) Probar que si Γ contiene una tautología, entonces Γ es dependiente.

c) Probar que $C(\Gamma)$ es dependiente.

Ejercicio 11. Un conjunto de fórmulas Γ se dice una *base* si verifica las siguientes propiedades:

i) Γ es independiente.

ii) Si Σ es un conjunto independiente de fórmulas tales que $\Gamma \subseteq \Sigma$, entonces $\Gamma = \Sigma$.

Probar que si Γ es un conjunto finito de fórmulas y Γ es una base, entonces Γ es insatisfactible. Dar ejemplos de bases infinitas que sean satisfactibles.

Ejercicio 12 Para cada una de las siguientes tautologías del cálculo proposicional encontrar una prueba.

a) $((p_1 \to \neg p_1) \to (p_1 \to p_1))$.

b) $(((p_1 \to p_2) \to (p_2 \to p_1)) \to (p_2 \to p_1))$

c) $((p_1 \to p_3) \to (\neg\neg p_1 \to p_3))$.

Ejercicio 13 Usando el método de los árboles probar que las fórmulas del ejercicio anterior son tautologías.

Ejercicio 14 Usando el método de los árboles, decidir si los siguientes conjuntos son satisfactibles. En caso afirmativo encontrar una valuación que lo satisfaga.

a) $\Gamma = \{(p_1 \wedge \neg p_2), (p_1 \to p_2), (\neg p_1 \to p_2)\}$.

b) $\Gamma = \{p_1, p_2, (p_1 \vee \neg p_2), ((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3), (\neg p_3 \to (p_1 \to p_2))\}$.

c) $\Gamma = \{(p_1 \to (p_2 \to \neg p_3)), (p_1 \to (\neg p_2 \to p_3)), (p_2 \to (\neg p_1 \to p_3))\}$.

Ejercicio 15. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si todo árbol de refutación de una fórmula es abierto, entonces la fórmula es una tautología.

b) Si una fórmula es una contradicción, entonces todo árbol de refutación de dicha fórmula es cerrado.

c) Si una fórmula es una contradicción, entonces todo árbol de refutación completo de dicha fórmula es cerrado.

Ejercicio 16 Sean Γ_1, Γ_2 conjuntos satisfactibles de fórmulas tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfactible. Mostrar que existen fórmulas $\alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2$ tales que $(\alpha \to \neg\beta)$ es tautología.

Ejercicio 17 Probar que el teorema de compacidad es equivalente al teorema de completitud.

Ejercicio 18 Sea Γ un conjunto de contingencias tales que para todo par de fórmulas $\alpha, \beta \in \Gamma, Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$. Probar que Γ es satisfactible: a) Usando el teorema de compacidad, b) Sin usar el teorema de compacidad.

Ejercicio 19 Sea $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ el siguiente conjunto infinito de fórmulas definidas inductivamente: $\alpha_1 = p_1$; y si $1 < i \leq n-1, \alpha_{i+1} = (\alpha_i \vee p_{i+1})$. Probar que si $\beta \in C(\Gamma)$ entonces existe un índice i tal que $\beta \in C(\{\alpha_i\})$.

Ejercicio 20 Probar que si $(\Gamma_i)_{i\in\mathbf{N}}$ es una familia numerable de conjuntos satisfactibles de fórmulas tales que $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ para todo índice i, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ es satisfactibles.